

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JÉDERSON DA SILVA

ANÁLISE DE ESTIMADORES DE ERRO A POSTERIORI APLICADOS AO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO REFINO H-ADAPTATIVO

CURITIBA

2015

JÉDERSON DA SILVA

ANÁLISE DE ESTIMADORES DE ERRO A POSTERIORI APLICADOS AO  
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO REFINO H-ADAPTATIVO

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira.

CURITIBA

2015

S586a

Silva, Jéderson da

Análise de estimadores de erro *a posteriori* aplicados ao Método dos Elementos Finitos utilizando refino H-adaptativo / Jéderson da Silva – Curitiba 2015.

149 f.: il. color. ; 30 cm.

Dissertação – Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, 2015 .

Orientador: Jucélio Tomás Pereira.

Bibliografia: p. 142 – 149.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Estimação adaptativa. 3. Teoria da estimativa. I. Universidade Federal do Paraná. II. Pereira, Jucélio Tomás. III. Título.

CDD 518.25

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

JÉDERSON DA SILVA

### **ANÁLISE DE ESTIMADORES DE ERRO A POSTERIORI APLICADOS AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO REFINO H-ADAPTATIVO**

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luciano Kiyoshi Araki  
UFPR

Prof. Dr. Marco Antônio Luersen  
UTFPR

Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado  
PUC/PR.

Curitiba, 06 de Fevereiro de 2015.

Dedico esta dissertação:

A minha esposa, Ângela, meu Pai, José, minha Mãe, Cleusa e meus irmãos,  
Fernando e Grasi.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, que tem conduzido meu caminho e suprido todas as minhas necessidades.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira pela orientação, pelo exemplo de profissionalismo e pela amizade e apoio no decorrer deste trabalho.

Ao meu Pai, José, e minha Mãe, Cleusa, pelo apoio, companheirismo e transmissão de valores e caráter.

A minha esposa Ângela, pela motivação, compreensão, carinho e por todos os momentos que não podemos passar juntos.

A minha família pelo incansável suporte concedido ao longo de toda esta trajetória.

Aos meus colegas e a todo o grupo do Laboratório de Vibrações e Mecânica dos Sólidos Computacional da UFPR, que com certeza, foram um dos pilares mais importantes desta caminhada.

Aos Professores Dr. Carlos Alberto Bavastri e Dr. Eduardo Márcio de Oliveira Lopes pelos diversos ensinamentos e colaborações prestadas.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PGMEC) por propiciar as condições necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) por possibilitar, através de apoio financeiro, a realização deste trabalho.

A todas as pessoas que de alguma maneira contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

Porque pela graça sois salvos, mediante a fé, e isto  
não vem de vós, é dom de Deus.

**Efésios 2:8**

Amarás, pois, ao Senhor teu Deus de todo o teu  
coração, e de toda a tua alma, e de todo o teu  
entendimento, e de todas as tuas forças.

**Marcos 12:30**

## RESUMO

O desenvolvimento de eficientes processos de geração de malhas adaptativas para análises por elementos finitos tem sido foco de intensivas pesquisas nas últimas décadas. Uma confiável estimativa de erro de aproximação deste método numérico é necessária para guiar de maneira adequada um processo adaptativo. O presente trabalho discute a análise de erros de aproximação, suas estimativas e a adaptatividade da malha quando da aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) em alguns problemas lineares de engenharia, sejam eles: problema unidimensional de barra (equação diferencial ordinária de 2ª ordem), problema unidimensional de viga fina de Euler-Bernoulli (equação diferencial ordinária de 4ª ordem), problema escalar plano de condução térmica (equação diferencial parcial de 2ª ordem) e problema vetorial de elasticidade plana (equação diferencial parcial de 2ª ordem). No corrente trabalho, as estimativas dos erros *a posteriori* baseiam-se na recuperação das derivadas de ordem superior e na norma em energia. São utilizados os seguintes estimadores: estimador fundamentado na Média Nodal Simples (MNS), estimador Zienkiewicz e Zhu (ZZ), estimador Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR) e estimador de Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP). Em todos os problemas abordados emprega-se como medida da qualidade dos estimadores o conceito de índices de efetividades globais e elementares. Com o cálculo do erro em cada elemento, é utilizado um processo *h*-adaptativo para gerar malhas de elementos finitos adequadas ao problema em estudo, levando em consideração os erros e a convergência a nível elementar, em contraposição à maioria dos trabalhos que discutem somente a convergência global. Como objetivo do remalhamento, dois critérios de malha ótima são analisados: critério de equidistribuição do erro elementar e critério de equidistribuição do erro específico elementar. Discute-se a teoria inerente à estimativa de erro e os princípios básicos do processo *h*-adaptativo adotado. Através de exemplos numéricos é realizada uma análise comparativa entre os diferentes estimadores e suas eficiências no contexto de um processo *h*-adaptativo. Para os problemas bidimensionais e para o problema unidimensional de barra empregando interpolações lineares, e para o problema de viga fina de Euler-Bernoulli utilizando elemento de dois nós com interpolação cúbica e recuperação em terceira derivada, os estimadores SPR e REP são totalmente idênticos para malhas uniformes e não uniformes. Diferentemente disso, ao serem empregadas interpolações quadráticas ao problema unidimensional de barra, aos problemas bidimensionais e realizar a recuperação em segunda derivada para o problema de viga, somente os estimadores de erro baseados em padrões, SPR e REP, apresentaram resultados satisfatórios e com precisões próximas. Com relação aos critérios de malha ótima, independente do problema e do tipo de elemento utilizado, o critério de equidistribuição do erro específico elementar apresenta uma malha adaptada com um número de elementos superior a malha adaptada seguindo o critério de equidistribuição do erro elementar, sendo que, esses elementos alocam-se preferencialmente em regiões de maiores gradientes.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos. *H*-adaptatividade. Estimadores de Erro *a posteriori*.



## ABSTRACT

The development of efficient methods for the generation of adaptive meshes for finite element analyses has been the focus of intensive research in recent decades. A reliable estimate of the approximation error of this numerical method is necessary to guide properly an adaptive process. The current study discusses the analysis of approximation errors, its estimators and the mesh adaptivity when the Finite Element Method (FEM) is applied to some linear engineering problems, namely: the one-dimensional bar problem (second order ordinary differential equation), the one-dimensional Euler-Bernoulli beam problem (fourth order ordinary differential equation), the heat conduction problem (second order partial differential equation) and the plane stress problem (second order partial differential equation). Herein, a posteriori error estimation is based on the recovery of higher order derivatives and on the energy norm. The following estimators are used: Nodal Simple Average (MNS) based estimator, Zienkiewicz and Zhu (ZZ) estimator, Superconvergent Patch Recovery (SPR) estimator and Recovery by Equilibrium of Patches (REP) estimator. The concept of global and elementary effectiveness indexes is employed in all the above problems as a measure of estimator quality. Calculating the error in each element, an h-adaptive process is used to generate appropriate meshes to the problem of concern, considering the errors and the convergence at elementary level. This is in contrast to most studies, in which only global convergence is discussed. As objective of remeshing, two criteria for mesh optimality are analyzed: the first one based on the equal distribution of the elementary error and the second one using the equal distribution of the elementary specific error. The theory inherent to error estimator and the basic principles of the adopted h-adaptive process are discussed. A comparative analysis between different estimators and their efficiency in the context of an h-adaptive process is performed through numerical examples. For the two-dimensional problems, the one-dimensional bar problem with linear interpolation and the Euler-Bernoulli beam problem with a two-node element with cubic interpolation and third derivative recovery, the SPR and REP estimators are totally identical for uniform and non-uniform meshes. However, when using quadratic interpolation in the one-dimensional bar problem, and in the two-dimensional problems and also when performing the recovery of the second derivative in the Euler-Bernoulli beam problem, the error estimators based on patches, SPR and REP, only present satisfactory results, with close accuracy. With respect to the mesh optimality criteria, regardless of the problem and the element used type, the criterion based on the equal distribution of the elementary specific error leads to an adapted mesh with a larger number of elements than the mesh adjusted by the equal distribution of the elementary error criterion. It is also observed that these additional elements are preferably allocated in regions with higher gradients.

*Keywords: Finite Element Method. H-adaptivity. A posteriori Error Estimators.*

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Padrão superconvergente para elemento CST. ....	52
Figura 2 – Problema 1: (a) Deformações analíticas ( $\alpha = 100$ ). (b) Carregamento analítico. ....	70
Figura 3 – Problema 1: (a) Erro relativo percentual global para elemento linear. (b) Índice de efetividade global para elemento linear. ....	71
Figura 4 – Problema 1: (a) Erro relativo percentual global para elemento quadrático. (b) Índice de efetividade global para elemento quadrático. ....	73
Figura 5 – Vistas ampliadas da solução recuperada: (a) MNS, (b) ZZ e (c) SPR. ...	73
Figura 6 – Problema 1: Soluções adaptativas para o estimador MNS. (a) Deslocamentos para malha inicial (26 GL). (b) Deslocamentos após convergência (434 GL). ....	76
Figura 7 – Problema 1: Soluções adaptativas para o estimador MNS. (a) Deformações para malha inicial (26 GL). (b) Deformações após convergência (434 GL). ....	76
Figura 8 – Problema 1: Soluções adaptativas para o estimador ZZ. (a) Deformações para malha inicial (26 GL). (b) Deformações após convergência (510 GL). ....	76
Figura 9 – Problema 1: Soluções adaptativas para o estimador SPR. (a) Deformações para malha inicial (26 GL). (b) Deformações após convergência (435 GL). ....	77
Figura 10 – Problema 1: Soluções adaptativas para o estimador REP. (a) Deformações para malha inicial (26 GL). (b) Deformações após convergência (435 GL). ....	77
Figura 11 – Problema 1: Soluções adaptativas para Estimador SPR. (a) Deformações para malha inicial (26 GL). (b) Deformações após convergência (1144 GL). ....	79
Figura 12 – Vista ampliada na recuperação por estimador SPR. (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de densidade do erro. ....	80
Figura 13 – Problema 2: Solução analítica. ....	83
Figura 14 – Problema 2: Resultados obtidos para diferentes malhas empregadas para análise dos diversos estimadores. ....	83

Figura 15 – Problema 2: (a) Erro relativo percentual global para elemento CST. (b) Índice de efetividade global para elemento CST.....	84
Figura 16 – Problema 2: (a) Erro relativo percentual global para elemento LST. (b) Índice de efetividade global para elemento LST.....	86
Figura 17 – Problema 2: Índices de efetividades elementares para elemento CST e estimador SPR. (a) Abordagem clássica. (b) Abordagem teste. ....	87
Figura 18 – Problema 2: Índices de efetividades elementares para elemento LST e estimador SPR. (a) Abordagem Clássica. (b) Abordagem teste. ....	89
Figura 19 – Parâmetro de refinamento corrigido em função do parâmetro de refinamento verdadeiro. ....	91
Figura 20 – Problema 2: Parâmetros de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) para elemento CST utilizando o critério de malha ótima de equidistribuição. (a) Estimador MNS. (b) Estimador ZZ. (c) Estimador SPR. (d) Estimador REP.....	92
Figura 21 – Problema 2: Parâmetros de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) para elemento LST utilizando o critério de malha ótima de equidistribuição. (a) Estimador SPR. (b) Estimador REP. ....	95
Figura 22 – Problema 2: Parâmetros de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) para elemento CST e estimador ZZ. (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico.....	97
Figura 23 – Problema 2: Parâmetros de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) para elemento LST e estimador SPR. (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico.....	99
Figura 24 – Problema 3: (a) Erro relativo percentual global para elemento CST. (b) Índice de efetividade global para elemento CST.....	103
Figura 25 – Problema 3: (a) Erro relativo percentual global para elemento LST. (b) Índice de efetividade global para elemento LST.....	104
Figura 26 – Problema 3: Índices de efetividades elementares para elemento CST e estimador SPR. (a) Abordagem Clássica. (b) Abordagem teste. ....	106
Figura 27 – Problema 3: Índices de efetividades elementares para elemento LST e estimador SPR. (a) Abordagem Clássica. (b) Abordagem teste. ....	107

Figura 28 – Problema 3: Parâmetro de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) para elemento CST e critério de equidistribuição do erro. (a) Estimador MNS. (b) Estimador ZZ. (c) Estimador SPR. (d) Estimador REP. ....	110
Figura 29 – Problema 3: Parâmetro de erro local para elemento LST e critério de equidistribuição do erro. (a) Estimador SPR. (b) Estimador REP.....	111
Figura 30 – Problema 3: Parâmetro de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) para elemento CST e estimador SPR. (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico. ....	113
Figura 31 – Problema 3: Parâmetro de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) para elemento LST e estimador SPR (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico.....	115
Figura 32 – Problema 4: (a) Segunda derivada da solução analítica. (b) Terceira derivada da solução analítica. (c) Carregamento analítico.....	119
Figura 33 – Problema 4: (a) Erro relativo percentual global para recuperação na terceira derivada. (b) Índice de efetividade global recuperação na terceira derivada. ....	122
Figura 34 – Problema 4: (a) Erro relativo percentual global para recuperação na segunda derivada. (b) Índice de efetividade global para recuperação na segunda derivada. ....	124
Figura 35 – Vista ampliada na recuperação da segunda derivada da solução numérica por: (a) Estimador MNS. (b) Estimador ZZ. (c) Estimador SPR. (c) Estimador REP.....	124
Figura 36 – Problema 4: Soluções adaptativas para função segunda derivada e estimador MNS. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.....	127
Figura 37 – Problema 4: Soluções adaptativas para função terceira derivada e estimador MNS. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.....	127
Figura 38 – Problema 4: Soluções adaptativas para Estimador MNS. (a) Função segunda derivada após convergência ampliada. (b) Função terceira derivada após convergência ampliada. ....	127
Figura 39 – Problema 4: Soluções adaptativas para função segunda derivada e estimador ZZ. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência. ....	128
Figura 40 – Problema 4: Soluções adaptativas para função terceira derivada e estimador ZZ. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência. ....	128

Figura 41 – Problema 4: Soluções adaptativas para Estimador ZZ. (a) Função segunda derivada após convergência ampliada. (b) Função terceira derivada após convergência ampliada. ....	128
Figura 42 – Problema 4: Soluções adaptativas para função segunda derivada e estimador SPR. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência. ....	129
Figura 43 – Problema 4: Soluções adaptativas para função terceira derivada e estimador SPR. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência. ....	129
Figura 44 – Problema 4: Soluções adaptativas para Estimador SPR. (a) Função segunda derivada após convergência ampliada. (b) Função terceira derivada após convergência ampliada. ....	129
Figura 45 – Problema 4: Soluções adaptativas para função segunda derivada e estimador REP. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência. ....	130
Figura 46 – Problema 4: Soluções adaptativas para função terceira derivada e estimador REP. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência. ....	130
Figura 47 – Problema 4: Soluções adaptativas para Estimador REP. (a) Função segunda derivada após convergência ampliada. (b) Função terceira derivada após convergência ampliada. ....	130
Figura 48 – Problema 4: Vista ampliada das soluções adaptativas para Estimador ZZ após convergência empregando recuperação em terceira derivada. (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico. ....	132
Figura 49 – Problema 4: Soluções adaptativas para função terceira derivada, estimador SPR e critério de equidistribuição do erro. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência. ....	134
Figura 50 – Problema 4: Soluções adaptativas para função segunda derivada, estimador SPR e critério de equidistribuição do erro. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência. ....	134
Figura 51 – Problema 4: Soluções adaptativas para função terceira derivada, estimador REP e critério de equidistribuição do erro. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência. ....	134
Figura 52 – Problema 4: Soluções adaptativas para função segunda derivada, estimador REP e critério de equidistribuição do erro. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência. ....	135

Figura 53 – Problema 4: Vista ampliada para soluções adaptativas da função segunda derivada após convergência e critério de equidistribuição do erro. (a) Estimador SPR. (b) Estimador REP. ....	135
Figura 54 – Problema 4: Vista ampliada para soluções adaptativas da função segunda derivada após convergência e estimador SPR. (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico. ....	135
Figura 55 – Problema 4: Vista ampliada para soluções adaptativas da função segunda derivada após convergência e estimador REP. (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico. ....	136

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados do Problema 1: Elemento linear e refino uniforme. ....	71
Tabela 2 - Resultados do Problema 1: Elemento quadrático e refino uniforme. ....	72
Tabela 3 - Resultados do Problema 1: Elemento linear, refino $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição do erro. ....	75
Tabela 4 – Resultados do Problema 1: Elemento quadrático, refino $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição do erro. ....	78
Tabela 5 – Problema 1: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador SPR, elemento linear e refino $h$ -adaptativo. ....	79
Tabela 6 – Problema 1: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador SPR, elemento quadrático e refino $h$ -adaptativo. ....	80
Tabela 7 - Resultados do Problema 2: Elemento CST e refino uniforme. ....	85
Tabela 8 - Resultados do Problema 2: Elemento LST e refino uniforme.....	86
Tabela 9 - Resultados do Problema 2: Comparação entre abordagem clássica e abordagem teste para elemento CST, estimador SPR e refino uniforme.....	88
Tabela 10 - Resultados do Problema 2: Comparação entre abordagem clássica e abordagem teste para elemento LST, estimador SPR e refino uniforme. ....	88
Tabela 11 - Resultados do Problema 2: Elemento CST, refino $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição. ....	93
Tabela 12 - Resultados do Problema 2: Elemento LST, refino $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição. ....	94
Tabela 13 – Problema 2: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador ZZ, elemento CST e refino $h$ -adaptativo.....	96
Tabela 14 – Problema 2: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador SPR, elemento LST e refino $h$ -adaptativo. ....	100
Tabela 15 – Resultados do Problema 3 para o elemento CST e refino uniforme...	103
Tabela 16 – Resultados do Problema 3: Elemento LST e refino uniforme.....	104
Tabela 17 - Resultados do Problema 3: Comparação entre abordagem clássica e abordagem teste para elemento CST, estimador SPR e refino uniforme.....	105
Tabela 18 - Resultados do Problema 3: Comparação entre abordagem clássica e abordagem teste para elemento LST, estimador SPR e refino uniforme. ....	106

Tabela 19 – Resultados do Problema 3: Elemento CST, refino $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição do erro. ....	109
Tabela 20 - Resultados do Problema 2: Elemento LST, refino $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição. ....	112
Tabela 21 – Problema 3: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador SPR e elemento CST. ....	114
Tabela 22 – Problema 3: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador SPR, elemento LST e refino $h$ -adaptativo. ....	116
Tabela 23 – Resultados do Problema 4: Recuperação da terceira derivada e refino uniforme. ....	121
Tabela 24 – Resultados do Problema 4: Recuperação da segunda derivada e refino uniforme. ....	123
Tabela 25 - Resultados do Problema 4: Recuperação da terceira derivada da solução, refino $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição. ....	126
Tabela 26 – Problema 4: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador ZZ, recuperação da terceira derivada e refino $h$ -adaptativo. ....	132
Tabela 27 – Problema 4: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador SPR e REP, recuperação da segunda derivada e refino $h$ -adaptativo. ...	133



## LISTA DE ABREVIATURAS

CAE	<i>Computer-Aided Engineering</i> (Engenharia Assistida por Computador).
CST	<i>Constant Strain Triangle</i> (Elemento triangular de deformação constante).
GL	Graus de Liberdade.
LST	<i>Linear Strain Triangle</i> (Elemento triangular de deformação linear).
MEF	Método dos Elementos Finitos.
MNS	Média Nodal Simples.
PPR	<i>Polynomial Preserving Recovery</i> (Recuperação Preservando Polinômio).
RCP	<i>Recovery by Compatibility in Patches</i> (Recuperação por Compatibilidade de Padrões)
REP	<i>Recovery by Equilibration of Patches</i> (Recuperação por Equilíbrio de Padrões).
SCR	<i>The Superconvergent Cluster Recovery Method</i> (Método Superconvergente de Recuperação de Grupo).
SPR	<i>Superconvergent Patch Recovery</i> (Superconvergente de Recuperação de Padrões).
SPRE	<i>Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium</i> (Superconvergente de Recuperação por Padrões utilizando Condições de Equilíbrio).
SPREB	<i>Superconvergent Patch Recovery Incorporating Equilibrium and Boundary Conditions</i> (Superconvergente de Recuperação por Padrões incorporando Condições de Equilíbrio e de Contorno).
ZZ	Zienkiewicz e Zhu.

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Alfabeto Latino

$\mathbf{1}_j$	Vetor nulo, exceto na posição $j$ -ésima, na qual possui valor 1.
$\mathbf{a}$	Vetor global dos coeficientes incógnitos do polinômio de recuperação.
$A$	Área da seção transversal da barra.
$\mathbf{A}$	Matriz característica associada ao método SPR.
$\mathbf{a}_j$	Vetor dos coeficientes incógnitos para uma componente de tensão.
$A_\Delta$	Área de um elemento triangular.
$\mathbf{b}$	Vetor de forças de corpo.
$\mathbf{B}$	Matriz das derivadas das funções de forma elementares.
$B(\cdot, \cdot)$	Forma bilinear contínua.
$\mathbf{b}_{SPR}$	Vetor característico associado ao método SPR.
$C$	Constante do processo de projeção do erro.
$\mathbf{D}$	Tensor constitutivo linear.
$\mathbf{D}_m$	Matriz de segunda derivada das funções de forma de interpolação.
$\mathbf{D}_v$	Matriz de terceira derivada das funções de forma de interpolação.
$D_\theta$	Desvio do índice de efetividade.
$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	Desvio do parâmetro do erro local elementar.
$\mathbf{e}$	Erro medido em energia.
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal.
$\mathbf{e}_u$	Erro em deslocamentos.
$\mathbf{e}^{rec}$	Função erro entre a solução recuperada e a solução analítica.
$\bar{e}$	Valor constante do erro em cada elemento.
$\mathbf{e}_\varepsilon$	Erro em deformação.
$\mathbf{e}_\sigma$	Erro em tensão.
$\mathbf{e}_\sigma^*$	Função erro estimado em tensão.
$\ \mathbf{e}\ $	Norma do erro em energia.

$\ \mathbf{e}^*\ $	Norma do erro em energia obtida via estimador de Erro.
$\ \mathbf{e}\ _{ie}$	Erro no <i>ie</i> -ésimo elemento.
$\ \mathbf{e}^*\ _{ie}$	Erro via estimador de erro no <i>ie</i> -ésimo elemento.
$\ \mathbf{e}_k\ $	Erro global na norma em energia para a malha <i>k</i> .
$\ \mathbf{e}\ _{lim}$	Erro limite por elemento.
$\ \mathbf{e}^{rec}\ $	Norma da função erro entre a solução recuperada e a solução analítica.
$\ \mathbf{e}_M^*\ $	Erro elementar em segunda derivada.
$\ \mathbf{e}_V^*\ $	Erro elementar em terceira derivada.
$f$	Termo fonte de carregamento de domínio.
$\mathbf{F}$	Vetor de forças nodais consistentes.
$F(\cdot)$	Funcional contínuo e linear.
$\mathbf{f}_j^e$	Vetor característico do elemento associada ao método REP.
$\mathbf{f}_j^p$	Vetor característico do padrão associado ao método REP.
$h$	Medida do tamanho elementar.
$h_k$	Parâmetro que indica o tamanho do elemento na malha <i>k</i> .
$h_{k+1}$	Parâmetro que indica o novo tamanho do elemento.
$\mathbf{H}_j$	Matriz característica do padrão associada ao método REP.
$\mathbf{H}_j^e$	Matriz característica do elemento associada ao método REP.
$H^m$	Espaço de funções de Hilbert de ordem <i>m</i> .
$H_0^m$	Espaço de funções de Hilbert de ordem <i>m</i> e suporte compacto.
$I$	Momento de inércia da seção transversal.
$k$	Número da malha.
$\mathbf{k}$	Matriz de condutividade térmica.
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez global.
$L$	Comprimento.
$I(\cdot)$	Funcional contínuo e linear.
$\mathbf{M}$	Matriz de massa global.
$\mathbf{M}^*$	Valores recuperados elementares em segunda derivada.

$\hat{M}$	Valores elementares da segunda derivada da solução dada via MEF.
$n$	Dimensão física do problema.
$N$	Número total de elementos na malha.
$NE$	Número de nós em um elemento.
$NeI$	Número de elementos compartilhado por um nó.
$NG$	Número total de nós globais.
$NGL$	Número de graus de liberdade.
$nsp$	Número de pontos superconvergentes.
$p$	Ordem polinomial.
$P^*$	Matriz de funções de aproximação.
$\bar{P}(x, y)$	Vetor que contém os termos polinomiais das coordenadas $(x, y)$ .
$q$	Número de termos utilizado para formar a base polinomial.
$r$	Constante positiva.
$r_x$	Função rotação ou derivada da deflexão em uma posição $x$ .
$S$	Operador diferencial linear.
$t$	Vetor de forças distribuídas no contorno.
$T$	Campo de temperaturas.
$th$	Espessura.
$u$	Função solução analítica.
$u$	Função de deslocamentos.
$\hat{u}$	Função solução via Método dos Elementos Finitos.
$\hat{u}$	Função de deslocamentos aproximados via Método dos Elementos Finitos.
$\bar{u}$	Vetor de variáveis primárias nodais.
$u^*$	Variável primária recuperada ou suavizada.
$\hat{u}_h^e$	Função de aproximação da variável primária em um elemento.
$U_j$	Valor da variável primária no nó global $j$ .
$U, V$	Espaços de funções.
$\hat{U}, \hat{V}$	Subespaços de $U$ e $V$ .
$\ u\ _E$	Medida da energia total acumulada.
$\ u_k\ _E$	Energia de deformação total analítica na malha $k$ .

$\ \hat{\mathbf{u}}_k\ _E$	Energia de deformação total via MEF na malha k.
$v$	Função escalar de variação cinematicamente admissível pertencente ao espaço $V$ .
$\mathbf{v}$	Função vetorial de variação cinematicamente admissível pertencente ao espaço $V$ .
$\hat{v}$	Função de variação cinematicamente admissível pertencente ao subespaço $\hat{V}$ .
$\mathbf{V}^*$	Valores recuperados elementares em terceira derivada.
$\hat{\mathbf{V}}$	Valores elementares da terceira derivada da solução dada via MEF.
$w$	Função deflexão.
$\hat{w}$	Deflexões elementares.

## Alfabeto Grego

$\alpha$	Constante.
$\nabla$	Operador gradiente.
$\delta(\cdot)$	Primeira variação do funcional $(\cdot)$ .
$\varepsilon$	Campo de deformações analítico.
$\varepsilon^*$	Campo de deformações recuperado ou suavizado.
$\hat{\varepsilon}$	Campo de deformações aproximado via Método dos Elementos Finitos.
$\zeta_g$	Parâmetro de erro global.
$\zeta_{ie}$	Parâmetro de refinamento elementar.
$\bar{\zeta}_{ie}$	Parâmetro de erro local elementar.
$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	Máximo valor do parâmetro de refinamento elementar.
$\bar{\zeta}_{ie,med}$	Média simples dos valores do parâmetro de erro local elementar.
$\eta$	Erro relativo percentual em energia.
$\bar{\eta}$	Erro relativo percentual admissível global.
$\eta_2$	Erro relativo percentual global analítico em segunda derivada.
$\eta_3$	Erro relativo percentual global analítico em terceira derivada.

$\eta_2^*$	Erro relativo percentual global em segunda derivada obtido pelos estimadores.
$\eta_3^*$	Erro relativo percentual global em terceira derivada obtido pelos estimadores.
$\theta$	Índice de efetividade global.
$\theta_{ie}$	Índice de efetividade elementar.
$\Pi$	Funcional distância quadrática.
$\Pi_j$	Funcional distância quadrática para a $j$ -ésima componente de tensão.
$\Pi_j^*$	Funcional distância quadrática modificado para a $j$ -ésima componente de tensão.
$\rho$	Função de x e y.
$\rho_0$	Constante.
$\sigma$	Campo de tensões analítico.
$\sigma^*$	Campo de tensões recuperado ou suavizado.
$\hat{\sigma}$	Campo de tensões aproximado via Método dos Elementos Finitos.
$\bar{\sigma}^*$	Vetor nodal das tensões recuperadas no elemento.
$\sigma_j^i$	Componente de tensão recuperada $j$ no $i$ -ésimo nó.
$(\hat{\sigma}_i)_j$	Vetor de tensões obtidas via MEF para o $i$ -ésimo nó do $j$ -ésimo elemento do conjunto.
$\sigma_m^*$	Vetor de médias nodais das tensões recuperadas para um nó.
$\sigma_p^*$	Vetor de tensões recuperadas em um padrão isolado via SPR.
$\sigma_{Rp}^*$	Vetor de tensões recuperadas em um padrão isolado via REP.
$\sigma_z^*$	Vetor nodal das tensões recuperadas via estimador ZZ.
$\Gamma_p$	Contorno do padrão de elementos.
$\Gamma_T$	Contorno com temperaturas prescritas (contorno de Neumann).
$\Gamma_u$	Contorno com deslocamentos prescritos (contorno de Dirichlet).
$\psi$	Função de interpolação elementar.
$\phi_j$	Função de interpolação global associada ao nó global $j$ .

$\nu$	Coeficiente de Poisson.
$\Omega$	Domínio de todo o problema em análise.
$\Omega_e$	Domínio elementar.
$\Omega_p$	Domínio do padrão de elementos.
$ \Omega_{ie} $	Medida do elemento <i>ie-ésimo</i> da malha.
$ \Omega $	Medida do domínio total.
$\omega$	Fator constante associado ao método REP.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>25</b>
1.1	OBJETIVOS .....	27
1.1.1	Objetivos gerais .....	27
1.1.2	Objetivos Específicos .....	27
1.2	ESTRUTURA DO TEXTO .....	28
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>29</b>
2.1	INTRODUÇÃO .....	29
2.2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	29
2.3	ESTIMATIVAS DE ERRO.....	31
2.3.1	Estimadores de erro <i>a posteriori</i> baseados em recuperação .....	35
2.4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS <i>H</i> -ADAPTATIVO.....	39
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO DOS ESTIMADORES DE ERRO E DO PROCESSO <i>H</i>-ADAPTATIVO.....</b>	<b>43</b>
3.1	ESTIMADOR DE ERRO BASEADO NA NORMA EM ENERGIA .....	43
3.2	QUALIDADE DOS ESTIMADORES DE ERRO .....	46
3.3	ESTIMADOR BASEADO NA MÉDIA NODAL SIMPLES (MNS).....	48
3.4	ESTIMADOR DE ZIENKIEWICZ E ZHU (ZZ).....	49
3.5	ESTIMADOR SUPERCONVERGENTE DE RECUPERAÇÃO DE PADRÕES (SPR).....	51
3.6	ESTIMADOR DE RECUPERAÇÃO POR EQUILÍBRIO DE PADRÕES (REP) .....	54
3.7	DEFINIÇÃO DOS CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA DO PROCESSO ADAPTATIVO .....	58
3.8	CRITÉRIOS DE MALHA ÓTIMA .....	60
3.8.1	Critério de equidistribuição do erro elementar .....	60
3.8.2	Critério de equidistribuição do erro específico elementar ou uniformidade da densidade do erro .....	63
3.9	PARÂMETROS DA QUALIDADE DOS ESTIMADORES E DO PROCESSO ADAPTATIVO .....	64
3.10	MEDIDA <i>H</i> DO TAMANHO ELEMENTAR .....	66
<b>4</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>67</b>
4.1	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....	67
4.2	PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE BARRA – REFINO UNIFORME .....	68
4.3	PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE BARRA – REFINO <i>H</i> -ADAPTATIVO.....	74
4.3.1	Análise dos estimadores de erro como guia de um processo <i>h</i> -adaptativo .....	74
4.3.2	Influência do critério de malha ótima .....	79
4.4	PROBLEMA PLANO DE CONDUÇÃO TÉRMICA – REFINO UNIFORME .....	81
4.4.1	Padrões de nós sobre o contorno.....	87
4.5	PROBLEMA PLANO DE CONDUÇÃO TÉRMICA – REFINO <i>H</i> -ADAPTATIVO .....	89



4.5.1	Análise dos estimadores de erro como guia de um processo <i>h</i> -adaptativo .....	90
4.5.2	Influência do critério de malha ótima .....	96
4.6	PROBLEMA DE ELASTICIDADE PLANA – REFINO UNIFORME.....	100
4.6.1	Padrões de nós sobre o contorno.....	105
4.7	PROBLEMA DE ELASTICIDADE PLANA – REFINO <i>H</i> -ADAPTATIVO ...	107
4.7.1	Análise dos estimadores de erro como guia de um processo <i>h</i> -adaptativo .....	108
4.7.2	Influência do critério de malha ótima .....	112
4.8	PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE VIGA DE EULER-BERNOULLI – REFINO UNIFORME .....	117
4.9	PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE VIGA DE EULER-BERNOULLI – REFINO <i>H</i> -ADAPTATIVO .....	125
4.9.1	Análise dos estimadores de erro como guia de um processo <i>h</i> -adaptativo .....	125
4.9.2	Influência do critério de malha ótima .....	131
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>138</b>
5.1	INTRODUÇÃO .....	138
5.2	CONCLUSÕES .....	139
5.2.1	Análise dos estimadores de erro como guia de um processo <i>h</i> -adaptativo .....	139
5.2.2	Influência do critério de malha ótima .....	140
5.3	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS .....	141
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>142</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A aplicação de métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Elementos de Contorno, Método das Diferenças Finitas e Métodos Sem Malha para solução e análise de problemas complexos de engenharia tem sido cada vez mais difundida e incentivada por apresentar várias vantagens como redução do tempo de cálculo, precisão e automação do processo numérico. O corrente trabalho emprega como método numérico de solução dos problemas propostos o MEF.

Segundo Reddy (2006), no MEF, um dado domínio de análise é discretizado em um conjunto de subdomínios onde, sobre cada subdomínio, a equação governante é aproximada utilizando um conjunto de baixa dimensão de parâmetros e funções. A principal razão para buscar aproximar a solução por um conjunto de subdomínios é o fato de que é mais simples representar uma função complicada como uma união de simples funções polinomiais. Neste contexto, a presença de erros numéricos é inevitável no processo de desenvolvimento do método e questões fundamentais são: Quais são os erros relativos ao MEF? Como o erro pode ser medido, controlado e efetivamente minimizado?

Dessa maneira, paralelamente ao desenvolvimento dos métodos numéricos surgem intensas pesquisas relacionadas à estimativa dos erros ocasionados pela aproximação da solução e à geração automática de malhas adequadas aos problemas em estudo. São várias as fontes de erros presentes no MEF, entre as quais, é possível citar, erros de aproximação de domínio, erros de aritmética finita e quadratura e erros de aproximação. O presente trabalho trata da análise de erros de aproximação.

Em geral, ancorado em estimadores de erro confiáveis e estratégias adaptativas eficientes e automatizadas busca-se gerar malhas de elementos finitos adequadas a cada problema, diminuindo cada vez mais os requisitos quanto a um grande conjunto de conhecimentos sobre o problema estudado e da experiência do projetista.

As estimativas de erros de aproximação em elementos finitos podem ser divididas, em geral, em duas categorias principais: estimativas de erro *a priori* e estimativas de erro *a posteriori* (AINSWORTH; ODEN, 2000). A primeira é realizada

antes que a solução numérica seja obtida e fornece uma medida qualitativa referente aos erros de aproximação, avaliando como estes se comportam a medida que a discretização do domínio é modificada (GRÄTSCH; BATHE, 2005). A segunda categoria é obtida após a solução numérica ser encontrada. Um dos tipos de estimadores de erro *a posteriori* baseia-se em utilizar a própria solução numérica para obter uma solução recuperada e, a partir desta, realizar a estimativa dos erros (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987). Estes são denominados estimadores de erro baseados em recuperação, os quais são objetos de estudo deste trabalho. Esta categoria de estimadores de erro pode ser empregada para desenvolver algoritmos de malhas adaptativas, uma vez que os mesmos permitem computar o tamanho dos erros locais (PRUDHOMME *et al.*, 2003).

Em geral, uma análise por elementos finitos é iniciada com uma malha grosseira. Cálculos dos erros locais podem ser realizados pelos estimadores. Caso a solução não satisfaça a precisão pré-estabelecida, ajustes são realizados de forma a obter a solução desejada com o mínimo custo computacional possível. Deste modo, pode-se pensar em estratégias adaptativas como métodos que buscam uniformizar o erro por toda a malha.

Três formas básicas de adaptatividade da malha são geralmente empregadas (COOK *et al.*, 2002). A mais comum entre todas e utilizada neste trabalho, é o refino  $h$ , o qual implica em modificação dos tamanhos elementares, de modo a obter a precisão desejada em todo o domínio (ZHU; ZIENKIEWICZ, 1988). A segunda forma é o refino  $p$ , que mantém constante a malha inicial, porém aumenta a ordem polinomial da aproximação utilizada (DUARTE, 2003; ZHU; ZIENKIEWICZ, 1988; FLAHERTY, 2000). Por fim, tem-se o refino  $r$ , que diz respeito à realocação dos nós da malha seguindo as regiões com maior erro, sem modificar a ordem polinomial e nem alterar o número de graus de liberdade da análise (BRANDÃO, 2008; FLAHERTY, 2000). Alguns autores classificam o refino  $r$  como sendo uma variação do refino  $h$ .

Neste contexto, o corrente trabalho trata da análise de erros de aproximação, suas estimativas e a adaptabilidade da malha, utilizando o MEF para resolver um problema unidimensional de barra (equação diferencial ordinária de 2ª ordem), problema de viga fina de Euler-Bernoulli (equação diferencial ordinária de 4ª ordem), problema escalar bidimensional de condução térmica (equação diferencial parcial de 2ª ordem) e problema vetorial de elasticidade plana (equação diferencial

parcial de 2ª ordem). A estimativa dos erros baseia-se na recuperação das derivadas de ordem superior e na norma de energia. Com o objetivo de realizar uma análise comparativa, são empregados, para cada um dos problemas lineares citados, os seguintes estimadores: estimador fundamentado na Média Nodal Simples (MNS), estimador Zienkiewicz e Zhu (ZZ), estimador Superconvergente de Recuperação de Padrões (*Superconvergent Patch Recovery* - SPR) e estimador de Recuperação por Equilíbrio de Padrões (*Recovery by Equilibration of Patches* - REP). Além disso, dois critérios de malha ótima são adotados. O primeiro é baseado na equidistribuição do erro (ZHU; ZIENKIEWICZ, 1988), onde se busca que todos os elementos da malha possuam a mesma medida de erro ao final do processo. O segundo critério é baseado na equidistribuição do erro específico (BUGEDA, 1990), isto é, a razão do quadrado do erro por unidade de área para todos os elementos do domínio é igualmente distribuída. Nesse caso, o objetivo é obter uma densidade de erro uniforme.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivos gerais

O presente trabalho tem como objetivo principal um estudo comparativo entre diferentes estimadores de erro baseados em recuperação (estimador MNS, estimador ZZ, estimador SPR e estimador REP) quando da análise de erros de aproximação, suas estimativas e a  $h$ -adaptatividade da malha na aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) em problemas lineares de engenharia de diferentes ordens.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

O objetivo geral pode ser detalhado nos seguintes objetivos secundários:

- i. Implementar uma estrutura acoplada de solução via MEF e controle de erro via  $h$ -adaptatividade para:
  - a. Problema unidimensional de barra utilizando elemento linear e elemento quadrático.

- b. Problema unidimensional de viga fina de Euler-Bernoulli.
  - c. Problema escalar plano de condução térmica utilizando os elementos CST (*Constant Strain Triangle*) e LST (*Linear Strain Triangle*).
  - d. Problema vetorial de elasticidade plana utilizando os elementos CST e LST.
- ii. Discutir e comparar as características e eficiência em níveis global e elementar dos diversos estimadores de erro como guias do processo  $h$ -adaptativo aplicado aos diferentes problemas propostos, utilizando diferentes critérios de malha ótima.
  - iii. Discutir e comparar as características e eficiência dos estimadores de erro quando submetidos a sucessivos refinamentos uniformes, possibilitando, assim, o cálculo e construção das taxas de convergência do erro e levantamento de outras características desejáveis em estimadores de erro.

## 1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

Com o intuito de atingir os objetivos apresentados anteriormente, este texto é dividido da seguinte forma:

No corrente capítulo é apresentada a importância e relevância de se obter análises confiáveis de elementos finitos, facilitando assim o desenvolvimento de projetos de engenharia adequados. Também são apresentados os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

A partir do segundo capítulo têm-se a base teórica do trabalho, onde são explanados as teorias e o histórico de estudos sobre o MEF, estimativas de erro, estratégias adaptativas e Método dos Elementos Finitos  $h$ -adaptativo.

No terceiro capítulo os estimadores de erro adotados, o processo  $h$ -adaptativo e os critérios de malha ótima são definidos.

No quarto capítulo são apresentados os resultados numéricos do trabalho.

Por fim, no quinto capítulo são expostas as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada uma revisão da literatura referente aos tópicos de relevância deste trabalho. São discutidas as teorias e o histórico de estudos sobre estimadores de erro e Método dos Elementos Finitos  $h$ -adaptativo.

### 2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Projetar sistemas complexos de engenharia envolve, na maioria das vezes, o uso de ferramentas *CAE (Computer-Aided Engineering)*. Nesse tipo de ferramenta, técnicas de simulação computacional são frequentemente empregadas para modelar e investigar fenômenos físicos que ocorrem nestes sistemas. Frequentemente, a simulação requer resolver complexas equações diferenciais que governam o problema (LIU, 2003). Tradicionalmente, tais equações diferenciais são solucionadas pela utilização de métodos numéricos. Neste caso podem ser citados o Método dos Elementos Finitos, o Método dos Elementos de Contorno, o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos Generalizados, o Método de Trefftz, *etc.*

Segundo Reddy (2006), a aplicação do MEF se baseia na transformação de um problema de valor de contorno (dado pelo conjunto de equações diferenciais e as condições de contorno do problema), denominado de forma forte, em um problema equivalente, obtido por meio de, por exemplo, a aplicação do Método de Resíduos Ponderados de Galerkin. Com isso, uma forma integral e com requisitos de diferenciação das variáveis primárias mais enfraquecidas é obtida. Esta forma integral é denominada forma fraca. Neste caso, a forma variacional, a qual também é equivalente à forma fraca para problemas da mecânica estrutural, pode ser dada por (REDDY, 2006; ODEN; REDDY, 2011):

Encontrar  $u \in U$ , tal que

$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V, \quad (2.1)$$

em que  $U$  e  $V$  são espaços de Hilbert (ou seja, espaços normados e com produto interno) definidos no domínio de análise  $\Omega \subset R^n$ , sendo  $n$  a dimensão física do problema (no corrente trabalho,  $n = 1$  ou  $n = 2$ ),  $B(\cdot, \cdot)$  é a forma bilinear contínua associada ao problema e definida em  $U \times V$ ,  $v$  é uma função de variação cinematicamente admissível e  $F(\cdot)$  é um funcional contínuo e linear definido no espaço  $V$ . A função de aproximação por elementos finitos  $\hat{u}$ , que substitui a função solução analítica  $u$ , é a solução correspondente do problema variacional definido no subespaço  $\hat{U} \subset U$ . Neste caso, o novo problema variacional pode ser escrito como:

Encontrar  $\hat{u} \in \hat{U}$ , tal que

$$B(\hat{u}, \hat{v}) = F(\hat{v}), \quad \forall \hat{v} \in \hat{V} \subset V. \quad (2.2)$$

Assim,  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$  são os subespaços de funções polinomiais por partes de ordem  $p$ , contidos em  $U$  e  $V$ , respectivamente,  $\hat{U}$  é o subespaço das funções de aproximação e  $\hat{V}$  é o subespaço das funções de variação admissíveis.

A solução do problema posto através da Eq. (2.2) poder ser analisada à luz de dois importantes teoremas (REDDY, 1986):

**Teorema 1:**

*Todo espaço normado de dimensão finita é completo.*

**Teorema 2 (Lax-Milgram):**

*Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $B: H \times H \rightarrow R$  uma forma bilinear contínua com forma  $H$ -elíptica definido sobre  $H$ . Então, para qualquer funcional linear e contínuo  $F \in H'$  (espaço dual de  $H$ ), existe um único  $u \in H$  tal que*

$$B(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H. \quad (2.3)$$

Nesse caso, pode-se concluir que, como o espaço das soluções de elementos finitos é um espaço de Hilbert, o problema variacional (2.2) possui uma sequência que converge para a solução e a solução é única.

Aplicando a forma variacional (2.2) a cada elemento finito da malha, obtém-se um sistema matricial de equações que fornece a relação entre os valores das variáveis nodais e os carregamentos aplicados. A superposição desse sistema resulta em um sistema matricial de equações global, o qual relaciona o vetor de variáveis primárias nodais,  $\bar{u}$ , e o vetor de carregamentos nodais consistentes,  $F$ , através da matriz de rigidez global,  $K$ , na forma

$$K\bar{u} = F \quad (2.4)$$

A aplicação das condições de contorno de Dirichlet (vínculos) permite a eliminação dos valores dos graus de liberdade (GL) conhecidos do sistema matricial, resultando em um novo sistema contendo somente os valores dos GL ainda incógnitas. A solução desse sistema possibilita a obtenção destes últimos. Várias são as referências na área, por exemplo, Becker *et al.* (1981), Zienkiewicz e Taylor (2000), Cook *et al.* (2002), Akin (2005), Reddy (2006) e Khennane (2013).

## 2.3 ESTIMATIVAS DE ERRO

São diversos os erros introduzidos na solução de uma dada equação diferencial pelo MEF. Em geral, podem ser atribuídos a três raízes principais (REDDY, 2006)

- i. *Erros de aproximação de domínio:* em geral, eles podem ser interpretados como erros de especificação de dados do problema porque a solução será encontrada a partir de uma equação diferencial com um domínio modificado. Com o refino da malha, o domínio é mais precisamente representado e, deste modo, os erros de aproximação do domínio tendem a zero. Em problemas unidimensionais, os domínios considerados são



linhas retas. Deste modo, nenhuma aproximação do domínio se faz necessária. Em problemas bidimensionais envolvendo domínios não retangulares, erros de aproximação de domínio são inseridos nas soluções de elementos finitos.

- ii. *Erros de aritmética finita e quadratura:* quando cálculos de elementos finitos são realizados em um computador, erros de arredondamento no cálculo dos números e erros provindos da estimativa numérica de integrais são introduzidos na solução. Na maioria dos problemas lineares com um pequeno número de graus de liberdade totais do sistema, esses erros são esperados como sendo pequenos (ou zero quando uma determinada precisão decimal é implantada). Além disso, é possível reduzir os erros de integração numérica através da correta especificação do número de pontos de integração, tendo como referência a ordem polinomial das funções de forma. Outra alternativa, é evitar uma malha com elementos muito distorcidos, os quais podem provocar fortes variações no Jacobiano, deteriorando o processo de integração numérica. Segundo Cook *et al.* (2002), ao se utilizar uma malha com tamanhos de elementos muito distintos, a qual gera termos na matriz de rigidez de diferentes ordens de grandeza, obtém-se um número de condicionamento<sup>1</sup> alto, implicando em uma diminuição da precisão numérica.
- iii. *Erros de aproximação:* são erros decorrentes da substituição da função  $\mathbf{u}$  (solução exata do problema) por uma função  $\hat{\mathbf{u}}_h^e$  (em geral polinomial), resultante da aproximação da variável primária  $\mathbf{u}$  em um elemento  $\Omega_e$  e são inerentes a qualquer problema. Nesse caso, a solução exata  $\mathbf{u}$  é aproximada na forma:

---

<sup>1</sup> Entende-se por número de condição ou condicionamento, um escalar definido como a razão entre o maior e o menor autovalor de uma matriz, nesse caso, a matriz de rigidez global ( $\mathbf{K}$ ). Esse número indica uma medida do número de dígitos de precisão que poderão ser perdidos ao se resolver um sistema algébrico de equações, como o dado pela Eq. (2.4).

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_{e=1}^N \sum_{h=1}^{NE} \hat{\mathbf{u}}_h^e \boldsymbol{\psi} \equiv \sum_{j=1}^{NG} U_j \phi_j \quad (2.5)$$

onde  $\hat{\mathbf{u}}$  é a solução aproximada de elementos finitos sobre o domínio ( $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}_h^e$  em  $\Omega_e$ ),  $N$  é o número total de elementos na malha,  $NG$  é o número total de nós globais,  $NE$  é o número de nós em um elemento,  $U_j$  e  $\phi_j$  denotam, respectivamente, o valor de  $\mathbf{u}$  e a função de interpolação global associadas ao nó global  $j$  e  $\boldsymbol{\psi}$  expressa a função de interpolação elementar.

Tendo como objetivo quantificar os erros de aproximação, os quais são estudados ao longo deste trabalho, surgiram distintos estimadores de erro. As estimativas de erros no MEF podem ser divididas, em geral, em duas categorias principais: estimativas de erro *a priori* e estimativas de erro *a posteriori*.

A primeira categoria refere-se aos estimadores onde os erros são obtidos antes que a solução seja conhecida e fornecem dados relativos ao comportamento assintótico dos erros de discretização, ou seja, o quão rápido o erro muda quando a discretização é modificada. Porém, os estimadores de erro *a priori* não são projetados para fornecer uma estimativa de erro real de uma dada malha (GRÄTSCH; BATHE, 2005).

Por outro lado, segundo Zienkiewicz e Zhu (1987), utilizando estimadores de erro *a posteriori*, o cálculo de valores mais precisos dos campos de deslocamentos, tensões e/ou deformações é alcançado utilizando o próprio resultado numérico, ou seja, o estimador de erro é obtido após uma solução aproximada ser conhecida. Ademais, segundo Prudhomme *et al.* (2003), essas estimativas podem ser empregadas para desenvolver algoritmos de malhas adaptativas utilizados na melhoria da malha de elementos finitos uma vez que as mesmas possibilitam computar o tamanho dos erros locais. Como trabalhos pioneiros no assunto podem-se citar Babuska e Rheinboldt (1978, 1980, 1981), Babuska (1983) e Babuska e Dorr (1981), onde os estimadores de erro utilizam equilíbrio residual para cálculo do erro.

Segundo Stewart e Hughes (1998) e Zienkiewicz *et al.* (1999), os estimadores de erro *a posteriori* podem ser agrupados em duas classes principais: estimadores baseados em resíduo e estimadores baseados em recuperação.

*Estimadores de erros baseados em resíduos* classificam-se em estimadores *a posteriori* explícitos e implícitos (STEWART; HUGHES, 1998). Segundo Grätsch e Bathe (2005), esquemas explícitos são baseados diretamente na aproximação de elementos finitos e dados disponíveis referentes ao problema, ou seja, empregam o cálculo direto de resíduos na aproximação para encontrar uma estimativa para o erro em uma determinada norma. Por outro lado, os estimadores implícitos envolvem a solução de problemas de valor de contorno locais auxiliares, cuja solução produz uma aproximação para o erro real. Neste caso, os problemas de valor de contorno a serem resolvidos são locais, podendo ser postos sob a forma de um pequeno padrão de elementos (*subdomain residual method*) ou somente sobre um único elemento (*element residual method*). Como seria de se esperar, os esquemas explícitos usualmente acarretam em menor custo computacional do que os esquemas implícitos, uma vez que estes envolvem a solução de um sistema algébrico de equações (AINSWORTH; ODEN, 2000). Para uma revisão mais ampla sobre estimadores de erros baseados em resíduos implícitos, pode-se consultar, por exemplo, Ainsworth e Oden (1993a, 1993b, 1993c). Já para trabalhos relacionados à aplicação dos estimadores de erro explícitos, são sugeridos os trabalhos de Stewart e Hughes (1997), Babuska e Rheinboldt (1978) e Johnson e Hansbo (1992).

De acordo com Ainsworth e Oden (2000), frequentemente o analista de elementos finitos está mais interessado no gradiente da aproximação de elementos finitos do que na aproximação da própria função primária. Por exemplo, em problemas de elasticidade, as deformações e tensões são a principal preocupação ao invés dos deslocamentos, que é a variável primária do problema. Além disso, a componente normal do gradiente da aproximação é geralmente descontínua entre os contornos do elemento, o que significa que se está apresentando uma aproximação descontínua ao longo da principal variável de interesse. Por esta razão, muitos *softwares* incorporam um procedimento de pós-processamento em que a aproximação do gradiente é suavizada antes de ser apresentada ao usuário. Esta aproximação, em certas circunstâncias fornece uma precisão superior à aproximação apresentada pelos valores originais do problema. Logo, estimadores de erros baseados em recuperação são fundamentados na diferença entre os valores aproximados (originais) e os valores recuperados obtidos através do pós-processamento para estimar os erros. Essa abordagem, por mais genérica que seja, apresenta ótimas estimativas para o erro verdadeiro.

### 2.3.1 Estimadores de erro *a posteriori* baseados em recuperação

Estimadores de erro baseados em recuperação foram apresentados inicialmente por Zienkiewicz e Zhu (1987) no contexto de problemas elípticos lineares. Nesse trabalho, os autores empregam o estimador Média Nodal Simples (MNS) e o estimador de Zienkiewicz e Zhu (ZZ ou projeção L2) para obter as tensões recuperadas e comparam o campo de tensões interpolado das soluções recuperadas com a solução de elementos finitos de modo a obter uma estimativa para o erro da solução numérica. Segundo Oh e Batra (1999), o estimador MNS e estimador ZZ possuem boas estimativas do erro somente para elementos lineares.

Observando que a qualidade dos estimadores de erro *a posteriori* depende fortemente da qualidade dos valores recuperados dos gradientes, Zienkiewicz e Zhu (1992a, 1992b) desenvolveram um novo método de recuperação baseado em padrões elementares. Esse novo estimador, denominado estimador Superconvergente de Recuperação de Padrões (*Superconvergent Patch Recovery - SPR*) supera as dificuldades encontradas pelos métodos de recuperação citados anteriormente, mostrando-se efetivo para elementos de ordens polinomiais elevadas e testado através de vários trabalhos de Zienkiewicz e Zhu (1992a, 1992b, 1993, 1995). A ideia básica do método SPR é realizar um ajuste por mínimos quadrados dos gradientes da solução de elementos finitos sobre padrões locais de elementos em pontos pré-selecionados, nos quais, a taxa de convergência é maior do que a taxa global do MEF, ou pelo menos, mais precisa. Esse estimador foi estendido, mais tarde, para alguns problemas dinâmicos (LI, 1996; WIBERG; LI, 1994).

Os valores recuperados pelo método SPR, entretanto, não se destinam a satisfazer as equações governantes ou equações de equilíbrio. Motivados por isso, uma modificação do método SPR, foi sugerida por Wiberg e Abdulwahab (1992, 1993). O novo método, denominado de método Superconvergente de Recuperação por Padrões utilizando Condições de Equilíbrio (*Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium - SPRE*), realiza um aprimoramento dos valores recuperados, satisfazendo as condições de equilíbrio através de restrições, pelo menos, em um sentido de mínimos quadrados. Segundo Wiberg e Abdulwahab (1997), experimentos numéricos revelam, que ambos, SPR e SPRE, obtêm valores recuperados de alta qualidade em nós do interior do domínio, enquanto que, em nós pertencentes ao contorno, a solução recuperada é relativamente deteriorada. Dessa

forma, com o objetivo de superar estas dificuldades, uma nova modificação destes processos de recuperação é estudada por Wiberg *et al.* (1994), denominada de Superconvergente de Recuperação por Padrões incorporando Condições de Equilíbrio e de Contorno (*Superconvergent Patch Recovery incorporating Equilibrium and Boundary conditions* - SPREB). O método é projetado de modo que, além das condições de equilíbrio, as condições de contorno prescritas também sejam satisfeitas, pelo menos, em um sentido de mínimos quadrados. Testes em problemas lineares demonstram um aumento considerável na qualidade das soluções recuperadas.

Segundo Zienkiewicz *et al.* (1999) as restrições adicionais impostas pelos métodos SPRE e SPREB, geralmente contrariam os requisitos de superconvergência, como, por exemplo, para soluções de ordem polinomial elevada, as quais não irão se ajustar à solução exata. Desse modo, embora um aumento da precisão dos valores recuperados possa ser obtido, o desempenho do processo de recuperação, do ponto de vista da estimativa de erro, é prejudicado (BABUSKA *et al.*, 1997).

Através do trabalho de Boroomand e Zienkiewicz (1997a) uma nova técnica de recuperação é desenvolvida, denominada Recuperação por Equilíbrio de Padrões (*Recovery by Equilibration of Patches* - REP). A formulação é centrada no equilíbrio de cada padrão, tendo como base o campo de tensões recuperado, o qual deve satisfazer, pelo menos em um sentido de mínimos quadrados, as tensões encontradas via MEF. É verificado que, para problemas unidimensionais e bidimensionais, em muitos elementos, o comportamento deste estimador é muito próximo do estimador SPR. Devido a não ser necessária a identificação dos pontos superconvergentes, esta técnica é aplicável para qualquer tipo de elemento nos quais estes pontos não são definidos. Além disso, esse método apresenta um custo computacional ligeiramente maior do que o estimador SPR. Uma versão modificada deste estimador é apresentada no trabalho de Boroomand e Zienkiewicz (1997b). Mais tarde, Boroomand *et al.* (2004) estendem a aplicação do estimador SPR e REP a problemas de placas utilizando a formulação de Reissner-Mindlin.

Mais recentemente, um processo alternativo de recuperação denominado de Recuperação por Compatibilidade em Padrões (*Recovery by Compatibility in Patches* - RCP) foi proposto no trabalho de Ubertini (2004) e depois desenvolvido e aperfeiçoado por Benedetti *et al.* (2006) e Castellazzi (2007). Este é baseado na

ideia de obter as tensões recuperadas através da minimização da energia complementar sobre cada padrão de elementos. O método mostra-se estável numericamente, possuindo características de superconvergência. Além disso, da mesma forma que o estimador REP, o método não é dependente do conhecimento da posição dos pontos superconvergentes.

Benedetti *et al.* (2006) modificam o processo RCP propondo uma nova maneira na formação dos padrões. Na versão original apresentada por Ubertini (2004) os padrões locais eram definidos da mesma maneira que as versões originais do estimador SPR e REP, ou seja, definidos como a união dos elementos conectados ao nó central do padrão. Neste caso, a configuração do padrão é definida pela união dos elementos conectados a um elemento central do padrão. O desempenho do estimador é comparado com a versão original do estimador RCP e do estimador REP em problemas planos lineares de engenharia. O processo resultante mostra-se eficiente e simples de ser implementado, não necessitando de procedimentos especiais na formação dos padrões do contorno. No trabalho de Castellazzi *et al.* (2011) o estimador RCP é estendido para problemas de placas de Reissner – Mindlin. São utilizados diferentes valores de espessura da placa, tanto em malhas estruturadas como não estruturadas. Os resultados numéricos confirmam a eficiência da técnica aplicada a problemas de placas.

Na busca por soluções recuperadas cada vez mais próximas da solução analítica, isto é, estimadores de erro mais precisos, uma nova técnica de recuperação, denominada Recuperação Preservando Polinômio (*Polynomial Preserving Recovery* – PPR) é introduzida e analisada por Zhang e Naga (2005). Nesse caso, dado um espaço de elementos finitos de ordem  $p$ , ao invés de montar um polinômio de grau  $p$  para os valores dos gradientes em alguns pontos amostrais de padrões elementares, como no método SPR, o novo método adapta um polinômio de grau  $p+1$  para valores da solução em alguns pontos nodais. A ideia está relacionada com os métodos sem malha, onde a atenção é voltada somente para os nós na proximidade vizinha e não aos elementos. Ou seja, a principal diferença entre os dois métodos é que o método SPR trabalha diretamente com os gradientes da solução em padrões de elementos, enquanto que o método PPR baseia-se na própria solução em pontos nodais vizinhos. Prova-se que o método mantém todas as propriedades de superconvergência do método SPR. Além disso, quando aplicado a elementos quadráticos, o método não somente apresenta

superconvergência nos vértices dos elementos, mas produz também superconvergência no centro das arestas dos elementos.

Com base nessas características, Naga e Zhang (2004), aplicam esse método de recuperação no clássico estimador de erro baseado em recuperação proposto por Zienkiewicz e Zhu (1987) através de vários exemplos numéricos. Esse novo estimador é denominado adequadamente de ZZ-PPR. Na mesma época, Zhang e Naga (2004) formalizam a validação deste estimador na aplicação de elementos lineares. Segundo os autores, o novo estimador de erro mostra-se assintoticamente exato, pelo menos, globalmente.

Um novo processo de recuperação, denominado Método Superconvergente de Recuperação de Grupo (*The Superconvergent Cluster Recovery Method - SCR*) é proposto e analisado no trabalho de Huang e Yi (2010). Dado, por exemplo, um espaço finito de elementos lineares, diferentemente do método SPR, que ajusta um polinômio linear para os valores dos gradientes em alguns pontos amostrais de um padrão, ou do método PPR, que ajusta um polinômio quadrático para valores da solução em alguns pontos nodais em determinados padrões e depois calcula a derivada para obter o gradiente recuperado, esse método ajusta um polinômio linear para os valores da solução em um grupo de pontos amostrais e, em seguida, toma as derivadas para obter os gradientes recuperados. Segundo os autores, o método mantém as características de superconvergência do método SPR e PPR e, quando comparado com esses métodos, apresenta uma maior eficiência computacional.

Na literatura, ainda podem ser encontrados diversos estudos de significância utilizando e desenvolvendo estimadores de erro baseados em recuperação. Nesse caso podem ser citados Zienkiewicz e Zhu (1991), Wiberg e Abdulwahab (1997), Lee *et al.* (1997), Lo e Lee (1998), Zienkiewicz *et al.* (1999), Oh e Batra (1999), Yan e Zhou (2001), Xu e Zhang (2003), Rajendran e Liew (2003), Boroomand e Mossaiby (2005a, 2005b), Korotov (2008), Huang *et al.* (2010), Segeth (2010), Castellazzi *et al.* (2010), Lins (2011), Horváth e Izsák (2012), Payen e Bathe (2011a, 2011b, 2012), Lakkis e Pryer (2012), Bi e Ginting (2014), Hu *et al.* (2014), Li e Lin (2014).

## 2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS *H*-ADAPTATIVO

Estimativas de erro originalmente consistiam em identificar quais elementos possuíam um erro acima do admissível e dividi-los até que uma solução aceitável fosse atingida (ZIENKIEWICZ, 2006). Esta metodologia, mesmo que eficiente, possui um custo computacional elevado, sendo muitas vezes maior até que o custo da própria análise de elementos finitos. Dessa forma, outras metodologias de adaptatividade de malha e controle de erros têm surgido.

Zhu e Zienkiewicz (1988) demonstraram um processo adaptativo em que o estimador de erro desenvolvido por Zienkiewicz e Zhu (1987) é aplicado utilizando refino  $h$  isotrópico. Os autores apresentaram uma maneira de obter diretamente cada tamanho elementar quando um erro admissível é fornecido. O critério de malha ótima definido é conhecido como critério de equidistribuição de erro, o qual se baseia na premissa de que o erro é igualmente distribuído por todos os elementos e não superior a um erro limite. A abordagem foi aplicada para problemas de elasticidade plana, comprovando a eficácia do processo no controle de erros de aproximação e na obtenção de malhas muito próximas das adequadas. Cabe ressaltar que a geração de um processo adaptativo eficiente e rápido depende da disponibilidade de um adequado gerador de malhas.

Em consequência de que um processo adaptativo depende fortemente da eficiência e capacidade do estimador (a qual, depende da qualidade dos valores recuperados) em computar erros locais, Zienkiewicz e Zhu (1992a, 1992b) desenvolveram um novo estimador como guia de processos  $h$ -adaptativos. Esse estimador, denominado estimador SPR, foi empregado considerando o mesmo critério de malha ótima aplicado por Zhu e Zienkiewicz (1988) e utilizando elementos triangulares e quadrangulares de diferentes ordens. O novo estimador mostrou-se eficiente como guia de um processo adaptativo aplicado a problemas de elasticidade plana.

Em 1993, dois critérios de malha ótima foram comparados no trabalho de Oñate e Bugeda (1993), quando da aplicação em análises de elementos finitos  $h$ -adaptativas. O primeiro diz respeito ao critério de equidistribuição de erro proposto por Zhu e Zienkiewicz (1988) e o segundo refere-se à equidistribuição do erro específico (ou densidade do erro). Neste critério, a razão do quadrado do erro elementar pela medida do domínio elementar deve ser igual à razão do quadrado do



erro total na malha pela medida do domínio total. Como estimador de erro, foi empregado o estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação proposto por Zienkiewicz e Zhu (1987) – estimador ZZ. Neste caso, fica evidente que os processos adaptativos são altamente dependentes dos critérios de malha ótima e dos critérios de convergência utilizados, sendo que para os problemas abordados na análise (cilindro de parede fina com pressão interna e fluxo potencial incompressível sobre um aerofólio), o critério de equidistribuição do erro específico tende a concentrar mais e menores elementos em regiões onde os gradientes são elevados. Por outro lado, o critério de equidistribuição de erro conduz a uma distribuição aproximadamente suave quanto à distribuição dos tamanhos elementares.

Desde então, várias são as aplicações em que análises adaptativas têm sido utilizadas. Por exemplo, Novotny e Fancello (1998) empregam o MEF juntamente com adaptatividade  $h$ ,  $p$  e  $hp$  para estudar problemas de flexão elástica de placas semi-espessas. A abordagem adotada analisa a influência das deformações cisalhantes transversais, caracterizando, assim, a teoria de primeira ordem para flexão de placas semi-espessas, denominada teoria de Reissner-Mindlin. Para guiar o processo adaptativo foi utilizado o estimador de erro de Zienkiewicz e Zhu (1987). Como esperado, a utilização de técnicas adaptativas alcançam boas taxas de convergência, além de uma diminuição apreciável no custo computacional quando comparado com refinamentos uniformes.

Ramm *et al.* (1998) aplicam técnicas adaptativas a problemas de otimização de forma e de topologia em estruturas de casca. São abordados os problemas de minimização de flexibilidade com restrição em tensão e maximização da ductilidade, considerando massa e deslocamentos prescritos e materiais com comportamento elastoplástico. Através dos resultados apresentados pelos autores, fica evidente que a combinação de adaptatividade a problemas de otimização topológica contínua gera uma melhora significativa na definição dos contornos quando comparada com a otimização topológica convencional (que utiliza discretização uniforme de malha). Com isso, é possível superar algumas dificuldades encontradas em problemas de otimização que utilizam discretização uniforme da malha, como por exemplo, uma distribuição de material descontínua com contornos irregulares entre as regiões de vazio e de material. Assim, é possível diminuir os possíveis pontos de singularidades de tensões, os quais podem surgir ao longo de contornos irregulares e afetam a confiabilidade da análise estrutural.

Coorevits e Bellenger (2004) propõem critérios de malha ótima alternativos com objetivo de obter análises de elementos finitos com precisões restritas por alguns parâmetros do processo. O refino da malha é do tipo *h*-adaptativo, sendo aplicado em problemas de elasticidade plana. Diferentemente da maioria dos critérios de malha ótima que prescrevem um valor admissível para o erro na malha, os critérios empregados pelos autores, consistem, por exemplo, em obter o máximo de precisão (mínimo de erro) com restrições quanto ao número de elementos na malha, ou quantidade de memória utilizada ou tempo de processamento.

Castellazzi *et al.* (2010) utilizam uma estimativa de erro *a posteriori* baseada em recuperação de gradientes aplicada ao MEF como guia do processo *h*-adaptativo para obtenção de uma precisão desejada em problemas de elasticidade plana e membranas finas de espessura constante. A medida do erro é realizada através da norma em energia e o critério de malha ótima empregada pelo autor consiste na equidistribuição do erro elementar por todo o domínio. O processo de recuperação utilizado é denominado *Recovery by Compatibility in Patches* (RCP), proposto por Ubertini (2004). São utilizados elementos triangulares e quadrangulares com interpolação linear e quadrática, sendo que, em todos os casos, a eficiência do estimador é medida através de seu índice de efetividade global.

Atualmente tem-se discutido a utilização de malhas com elementos anisotrópicos, as quais têm mostrado vantagens, principalmente em problemas físicos que apresentam características anisotrópicas, ou seja, onde as soluções estão sujeitas a variações mais bruscas em uma direção do que em outras. Alguns exemplos são problemas que possuem camadas-limite, ondas de choque, interfaces e singularidades geométricas *etc.* (XIE; YIN, 2011).

Uma malha adaptativa anisotrópica necessita de indicadores de erro direcional e, usualmente, esses indicadores envolvem a recuperação da matriz Hessiana de algum campo escalar (VALLET *et al.*, 2007). Assim, tendo a solução suavizada, é estimado o erro, as direções preferenciais anisotrópicas e, finalmente, gerada uma nova malha contendo elementos anisotrópicos (FORMAGGIA; PEROTTO, 2003; PICASSO, 2003; PICASSO, 2006; CAO, 2007; BOIS *et al.*, 2012; CAO, 2014).

Observa-se, por essa revisão bibliográfica que, para dispor de cálculos confiáveis através da solução encontrada pelo MEF, faz-se necessária a utilização de metodologias eficazes de estimativas de erros juntamente com técnicas

adaptativas de refino que levem a uma uniformização e limitação do erro por todo o domínio do problema. Contudo, geralmente os trabalhos discutem somente a convergência global do processo  $h$ -adaptativo, sendo que informações a níveis elementares não são consideradas. Com isso, além de medidas globais referentes à qualidade dos diversos estimadores de erro e a convergência do processo  $h$ -adaptativo, o corrente trabalho busca realizar uma análise crítica comparando vários estimadores de erro *a posteriori*; MNS, ZZ, SPR e REP, a níveis globais e elementares. Para isso, vários problemas lineares de engenharia, unidimensionais e bidimensionais e empregando diferentes operadores diferenciais são discutidos. Dessa maneira, medidas mais precisas da qualidade desses estimadores e das malhas adaptadas podem ser obtidas, envolvendo uma considerável parcela dos problemas de engenharia.

### 3 FORMULAÇÃO DOS ESTIMADORES DE ERRO E DO PROCESSO *H*-ADAPTATIVO

Esse capítulo tem como finalidade central a exposição da formulação geral na qual está fundamentado o corrente trabalho. Inicialmente é apresentado um breve resumo do equacionamento matemático para os estimadores de erro e as estratégias adaptativas a serem adotadas. Todo o equacionamento dos estimadores de erro baseado na norma em energia será voltado para estimativas de erro levando em consideração o problema de elasticidade plana, o qual, posteriormente é aplicado adequadamente a cada problema em análise.

#### 3.1 ESTIMADOR DE ERRO BASEADO NA NORMA EM ENERGIA

Em uma análise numérica de um problema de engenharia pode-se definir o erro como a diferença entre a solução exata ( $\mathbf{u}$ ) e a solução aproximada obtida pelo MEF ( $\hat{\mathbf{u}}$ ). Aplicando essa definição para a função deslocamento, o erro em deslocamentos ( $\mathbf{e}_u$ ) é dado por (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000)

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}. \quad (3.1)$$

De maneira semelhante, tendo como função, por exemplo, o campo de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (gradientes da solução  $\mathbf{u}$ ) e o campo de tensões  $\boldsymbol{\sigma}$ , pode-se medir a função erro ponto a ponto nessas variáveis como:

$$\mathbf{e}_\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (3.3)$$

sendo  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  o campo de deformações aproximadas e  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  o campo de tensões aproximadas, ambas obtidas via MEF.

A especificação do erro local como posto pelas Equações (3.1), (3.2) e (3.3) geralmente não é adequada e eventualmente equivocada. Por exemplo, os erros em tensões medidos sobre uma carga pontual serão localmente infinitos, porém, a solução geral poderá ser aceitável. Situações similares poderão existir próximas a cantos vivos, os quais, como se sabe, geram singularidades de tensões. Por esta razão, para se medir o erro de forma adequada são introduzidas diversas normas representando uma quantidade escalar do erro.

Utilizar-se-á neste trabalho a norma do erro em energia para quantificar o erro em cada região. Este conceito foi inicialmente introduzido por Zienkiewicz e Zhu (1987) e, para problemas elásticos, pode ser obtida como

$$\|\mathbf{e}\| = \left[ \int_{\Omega} (\mathbf{S}\mathbf{e})^T \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{e} d\Omega \right]^{1/2}, \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{e}$  é o erro medido em energia,  $\mathbf{S}$  é um operador diferencial linear que relaciona deslocamentos com as deformações, ou seja,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u}, \quad (3.5)$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{u}} \quad (3.6)$$

e  $\mathbf{D}$  é o tensor constitutivo linear, relacionando tensões e deformações conforme

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.7)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.8)$$

De maneira alternativa, pode-se escrever a norma do erro em energia  $\|\mathbf{e}\|$  dos seguintes modos:

$$\|\mathbf{e}\| = \left[ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\Omega \right]^{1/2}, \quad (3.9)$$

$$\|\mathbf{e}\| = \left[ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^T (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{1/2}, \quad (3.10)$$

$$\|\mathbf{e}\| = \left[ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{1/2}. \quad (3.11)$$

Por essas equações, pode-se observar a relação com o conceito de densidade de energia de deformação.

Para descrever o comportamento de problemas de análises de tensões é conveniente definir uma medida percentual do erro medido pela norma de energia, conhecido como erro relativo percentual em energia  $\eta$

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{u}\|_E} 100\%, \quad (3.12)$$

onde  $\|\mathbf{u}\|_E$  representa uma medida da energia total acumulada, sendo calculada por

$$\|\mathbf{u}\|_E = \left( \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \right)^{1/2}. \quad (3.13)$$

Porém, como a solução exata  $\mathbf{u}$  não é conhecida e, conseqüentemente,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$ , pode-se utilizar uma solução melhorada  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  ou  $\boldsymbol{\sigma}^*$ , que possua uma taxa de convergência superior à solução obtida diretamente pelo MEF,  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  ou  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  respectivamente. Deste modo, a norma do erro em energia, obtida em relação à solução melhorada, pode ser escrita como

$$\|\mathbf{e}^*\| = \left[ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right]^{1/2}. \quad (3.14)$$

Estimadores de erro formulados substituindo a solução exata por uma solução melhorada obtida por recuperação são chamados estimadores de erro

baseados em recuperação, técnica essa que é empregada neste trabalho. Este tipo de estimador de erro tem sido empregado por diversos autores, por exemplo, Craig *et al.* (1989), Oñate e Bugeda (1993), Castellazzi *et al.* (2010), Katili *et al.* (2012) e Nadal *et al.* (2013).

São vários os processos de recuperação existentes. Porém, a opção por adotar um estimador de erro baseado em recuperação é fundamentada no fato de que qualquer que seja o processo de recuperação escolhido, desde que resulte em uma solução recuperada que convirja a uma taxa maior do que a solução obtida pelo MEF gerará uma estimativa assintoticamente exata (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992b).

### 3.2 QUALIDADE DOS ESTIMADORES DE ERRO

Processos de recuperação podem ser utilizados para estimar o erro resultante de uma análise de elementos finitos simplesmente substituindo a solução exata por uma solução recuperada (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987). Deste modo, a função erro estimado, por exemplo, em relação ao campo de tensões, é dada por

$$\mathbf{e}_\sigma^* = \boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.15)$$

Notadamente, quanto maior a precisão da solução recuperada, maior é a qualidade do estimador de erro. Podem-se escrever estimadores de erro em várias normas através de sua definição (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000)

$$\|\mathbf{e}\| \approx \|\mathbf{e}^*\| = \|\mathbf{u}^* - \hat{\mathbf{u}}\|. \quad (3.16)$$

De modo a obter uma medida da precisão ou qualidade de um estimador de erro, define-se o conceito de índice de efetividade  $\theta$  como sendo a razão entre o erro estimado e o erro verdadeiro, expresso por

$$\theta = \frac{\|\mathbf{e}^*\|}{\|\mathbf{e}\|}. \quad (3.17)$$

Um teorema proposto por Zienkiewicz e Zhu (1992a, 1992b) mostra que, para todos os estimadores de erro baseados em recuperação, podem ser estabelecidos os seguintes limites para o índice de efetividade  $\theta$ :

$$1 - \frac{\|\mathbf{e}^{rec}\|}{\|\mathbf{e}\|} \leq \theta \leq 1 + \frac{\|\mathbf{e}^{rec}\|}{\|\mathbf{e}\|}, \quad (3.18)$$

onde  $\mathbf{e}^{rec}$  é a função erro entre a solução recuperada e a solução analítica. Portanto, sua norma é

$$\|\mathbf{e}^{rec}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^*\|. \quad (3.19)$$

Assim, caso a solução recuperada convirja a uma taxa mais elevada do que a solução de MEF, sempre uma estimativa assintoticamente exata é alcançada. Este fato pode ser provado considerando uma típica solução de elementos finitos com funções de forma de ordem  $p$ , associadas a uma medida do tamanho do elemento  $h$ , onde o erro na norma em energia é dado por (ODEN; REDDY, 2011)

$$\|\mathbf{e}\| = O(h^p). \quad (3.20)$$

Se a solução recuperada fornece um erro de uma ordem acima, isto é,

$$\|\mathbf{e}^{rec}\| = O(h^{p+r}), \text{ onde } r > 0, \quad (3.21)$$

então os limites do índice de efetividade são dados por

$$1 - O(h^r) \leq \theta \leq 1 + O(h^r) \quad (3.22)$$

e o estimador de erro é assintoticamente exato. Ou seja, o índice de efetividade tende a um quando o tamanho do elemento tende a zero. Isso significa que o



estimador de erro converge para o erro verdadeiro. Esta é uma importante propriedade dos estimadores de erro baseados em recuperação, a qual geralmente não é encontrada em estimadores de erro baseados em resíduo (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

Existem vários estimadores de erro baseados em recuperação. Dentre eles estão: estimador MNS, estimador ZZ (projeção L2), estimador SPR, estimador REP, estimador RCP, estimador ZZ-PPR, dentre outros. Além disso, existem algumas derivações destes estimadores tendo como base os conceitos primários desenvolvidos, como, por exemplo, SPRE e SPREB. A seguir, são apresentadas as formulações dos quatro estimadores de erro objetos de estudo deste trabalho. São eles: estimador MNS, estimador ZZ, estimador SPR e estimador REP. A escolha desses estimadores se dá principalmente pela vasta aplicação que os mesmos possuem, tanto academicamente, quanto em *softwares* comerciais de elementos finitos. Além disso, mesmo sendo estimadores antigos, os estimadores mais recentes baseiam-se diretamente nos conceitos propostos por estes métodos, como pôde ser percebido através da revisão bibliográfica realizada no Capítulo 2.

### 3.3 ESTIMADOR BASEADO NA MÉDIA NODAL SIMPLES (MNS)

Empregando o conceito de estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação proposto por Zienkiewicz e Zhu (1987), foram vários os métodos de recuperação do gradiente que surgiram. Um exemplo clássico e de simples implementação é o estimador MNS. Este consiste inicialmente na obtenção do gradiente da solução, por exemplo, o campo de tensões  $\hat{\sigma}$ . Com isso, sabendo que para um nó compartilhado por um total de  $Nel$  elementos existem, via de regra,  $Nel$  diferentes valores de  $\hat{\sigma}$ , pode-se estimar o vetor de médias nodais das tensões recuperadas ( $\sigma_m^*$ ) para o nó como (COOK *et al.*, 2002)

$$\sigma_m^* = \frac{1}{Nel} \sum_{j=1}^{Nel} (\hat{\sigma}_j), \quad (3.23)$$

onde  $(\hat{\sigma}_i)_j$  é o vetor de tensões obtidos via MEF para o  $i$ -ésimo nó do  $j$ -ésimo elemento do conjunto. Em um problema de elasticidade plana, utilizando elemento CST, suponha um nó conectado aos elementos 3, 5 e 7. Neste caso, o vetor de médias nodais das tensões recuperadas no  $i$ -ésimo nó será dado por

$$\begin{aligned} \sigma_m^* &= \begin{Bmatrix} \sigma_1^i \\ \sigma_2^i \\ \sigma_3^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^i \\ \sigma_y^i \\ \tau_{xy}^i \end{Bmatrix} = \frac{1}{Nel} \sum_{j=1}^{Nel} (\hat{\sigma}_i)_j = \frac{1}{3} ((\hat{\sigma}_i)_3 + (\hat{\sigma}_i)_5 + (\hat{\sigma}_i)_7) = \\ &= \frac{1}{3} \left( \begin{Bmatrix} (\hat{\sigma}_1^i)_3 \\ (\hat{\sigma}_2^i)_3 \\ (\hat{\sigma}_3^i)_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\hat{\sigma}_1^i)_5 \\ (\hat{\sigma}_2^i)_5 \\ (\hat{\sigma}_3^i)_5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\hat{\sigma}_1^i)_7 \\ (\hat{\sigma}_2^i)_7 \\ (\hat{\sigma}_3^i)_7 \end{Bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Após a obtenção de todos os vetores de médias nodais das tensões, um campo suavizado e contínuo entre os elementos pode ser construído através da utilização das mesmas funções de forma elementares ( $\psi$ ) empregadas para interpolar o campo de deslocamentos. Com isso, a parcela de um campo de tensões suavizadas sobre um elemento pode ser escrita como

$$\sigma^* = \psi \bar{\sigma}^*, \quad (3.25)$$

onde  $\sigma^*$  é o vetor das tensões suavizadas no elemento e  $\bar{\sigma}^*$  é o vetor nodal das tensões recuperadas para o elemento em questão. Logo, aplicando o conceito de norma em energia (Eq. 3.14) a nível elementar, é possível computar os erros localmente.

### 3.4 ESTIMADOR DE ZIENKIEWICZ E ZHU (ZZ)

Proposto por Zienkiewicz e Zhu (1987), este estimador é também conhecido como estimador ZZ, Z2 ou projeção L2. Este consiste, basicamente, na mesma

abordagem adotada pelo estimador MNS, ou seja, estima o erro através de um campo de tensões suavizado e contínuo ao longo de todo o domínio, o qual é obtido a partir da interpolação dos valores nodais recuperados utilizando as mesmas funções de forma empregadas para interpolar os deslocamentos nodais. A diferença básica entre os estimadores é como recuperar os valores nodais. Segundo Zienkiewicz e Zhu (1987), os valores nodais recuperados das tensões podem ser obtidos a partir da minimização do seguinte funcional

$$\Pi = \Pi(\sigma^*) = \int_{\Omega} (\sigma^* - \hat{\sigma})^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega. \quad (3.26)$$

onde  $\sigma^*$  é o campo vetorial de tensões suavizadas em um elemento dado pela Eq. (3.25).

A extremização de  $\Pi$  considerando uma variação qualquer  $\delta\sigma^*$  na componente de tensão implica, com base na condição necessária de mínimo de um funcional, que

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \psi^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) \delta\sigma^* d\Omega = 0 \quad (3.27)$$

onde  $\psi$  é a matriz de funções de forma elementares. Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo de Variações tem-se (REDDY, 2006)

$$\int_{\Omega} \psi^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega = \int_{\Omega} \psi^T (\psi\sigma_z^* - \hat{\sigma}) d\Omega = 0. \quad (3.28)$$

Definindo  $\sigma_z^*$  como o vetor nodal das tensões recuperadas via estimador ZZ e reorganizando essa expressão

$$\left( \int_{\Omega} \psi^T \psi d\Omega \right) \sigma_z^* = \left( \int_{\Omega} \psi^T \hat{\sigma} d\Omega \right). \quad (3.29)$$

Isolando  $\sigma_z^*$  tem-se

$$\sigma_z^* = \mathbf{M}^{-1} \left( \int_{\Omega} \psi^T \hat{\sigma} d\Omega \right) \quad (3.30)$$

onde  $\mathbf{M}$  é conhecida como a matriz de massa global com densidade unitária, sendo expressa por

$$\mathbf{M} = \left( \int_{\Omega} \psi^T \psi d\Omega \right). \quad (3.31)$$

Pode-se perceber que esta forma de recuperação dos valores nodais de tensão exige a solução de um sistema de equações cuja ordem depende da ordem da matriz  $\mathbf{M}$  e, se comparado com o estimador MNS, exige um esforço computacional mais elevado.

### 3.5 ESTIMADOR SUPERCONVERGENTE DE RECUPERAÇÃO DE PADRÕES (SPR)

No MEF existem pontos no interior do domínio de cada elemento que possuem uma característica denominada superconvergência. Ou seja, os valores das deformações ou tensões apresentam um erro que decresce mais rapidamente do que em outras regiões do elemento. A localização desses pontos para o campo de tensões coincide com os pontos de Gauss usados para integrar exatamente a matriz de rigidez de elementos não distorcidos (BARLOW, 1976).

O estimador SPR foi inicialmente desenvolvido por Zienkiewicz e Zhu (1992a e 1992b). De modo geral, esse estimador busca obter um polinômio que aproxime o campo de tensões e, a partir deste, definir os valores recuperados nos nós. Para isso, é realizado um ajuste por mínimos quadrados de valores de tensão (ou derivadas) obtidos nos pontos superconvergentes. Para tal, utiliza o conceito de padrões (*patch*) onde, ao invés de determinar o polinômio aproximado ao longo de

todo o domínio, obtém o polinômio que aproxima as tensões dentro de um conjunto de elementos constituído na vizinhança do nó em análise. Esses padrões são definidos pelo conjunto de elementos que estão conectados a um mesmo nó (Figura 1).

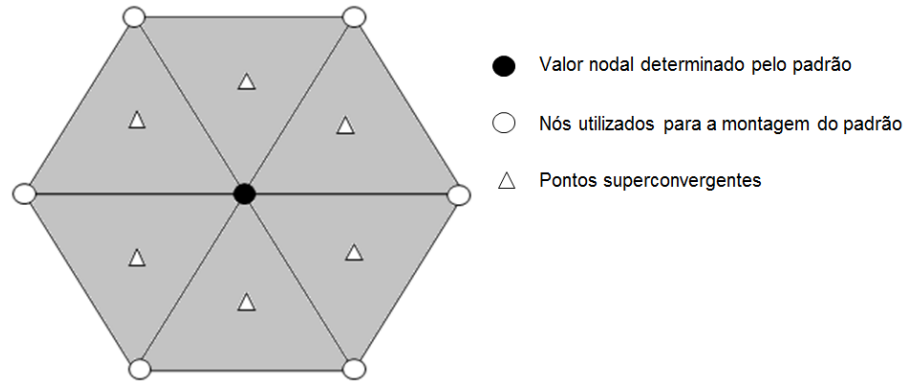


Figura 1 – Padrão superconvergente para elemento CST.  
Fonte: Adaptado de Zienkiewicz e Taylor (2000).

Assim, inicialmente define-se a aproximação para a solução recuperada em um padrão isolado como (CASTELLAZZI, 2007)

$$\sigma_p^* = \mathbf{P}^* \mathbf{a}, \quad (3.32)$$

sendo  $\mathbf{P}^*$  uma matriz de funções de aproximação e  $\mathbf{a}$  o vetor dos coeficientes incógnitas do polinômio de recuperação. Por exemplo, em um problema de elasticidade plana, estas variáveis podem ser colocadas em forma explícita como

$$\sigma_p^* = \begin{bmatrix} \sigma_{j=1}^i \\ \sigma_{j=2}^i \\ \sigma_{j=3}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^i \\ \sigma_y^i \\ \tau_{xy}^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{j=1} \\ \mathbf{a}_{j=2} \\ \mathbf{a}_{j=3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}(x,y) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{P}}(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{P}}(x,y) \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

onde  $\bar{\mathbf{P}}(x,y)$  é um vetor ( $1 \times q$ ) que contém os termos polinomiais nas coordenadas ( $x, y$ ),  $\mathbf{a}_j$  é um vetor de incógnitas ( $q \times 1$ ) para cada componente de tensão

recuperada  $j$  no  $i$ -ésimo nó  $(\sigma_j^i)$  e  $q$  é o número de termos utilizado para formar a base polinomial de ordem  $p$

$$\bar{\mathbf{P}}(x, y) = [1, x, y, \dots, y^p]. \quad (3.34)$$

O vetor de coeficientes incógnitos é obtido pela minimização da distância quadrática total  $\Pi(\mathbf{a})$  entre este polinômio e os valores de tensões obtidos via MEF nos pontos de Gauss dos elementos que compõem o padrão para o  $i$ -ésimo nó. Nesse caso, a distância quadrática formada para um padrão de elementos com um total de  $nsp$  pontos superconvergentes é dada por

$$\Pi(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{nsp} [\hat{\sigma}(x_k, y_k) - \sigma_p^*(x_k, y_k)]^2 = \sum_{k=1}^{nsp} [\hat{\sigma}(x_k, y_k) - \mathbf{P}^*(x_k, y_k) \mathbf{a}]^2 \quad (3.35)$$

onde  $(x_k, y_k)$  corresponde às coordenadas dos pontos superconvergentes. A minimização da função  $(\Pi)$  da Eq. (3.35) resulta em:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Pi(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \sum_{k=1}^{nsp} \mathbf{P}^{*T}(x_k, y_k) \mathbf{P}^*(x_k, y_k) \mathbf{a} - \sum_{k=1}^{nsp} \mathbf{P}^{*T}(x_k, y_k) \hat{\sigma}(x_k, y_k) = \mathbf{0}. \quad (3.36)$$

Agrupando os termos e isolando o vetor de incógnitas  $\mathbf{a}$ , tem-se:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}_{SPR}, \quad (3.37)$$

onde a matriz característica  $\mathbf{A}$  é dada por

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{nsp} \mathbf{P}^{*T}(x_k, y_k) \mathbf{P}^*(x_k, y_k) \quad (3.38)$$

e o vetor  $\mathbf{b}_{SPR}$  dado por

$$\mathbf{b}_{SPR} = \sum_{k=1}^{nsp} \mathbf{P}^{*T}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k) \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k). \quad (3.39)$$

Uma vez determinados os coeficientes do polinômio,  $\mathbf{a}_j$ , substituem-se as coordenadas do nó central do padrão na Eq. (3.32) para obter as componentes do vetor de tensões recuperadas no nó em questão. Aplicando o mesmo procedimento para todos os nós da malha é possível obter todos os valores recuperados de tensão  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$ . Com isso, emprega-se a Eq. (3.25) para obter a distribuição das tensões no interior de cada elemento do domínio.

Cabe ressaltar que, para que a técnica funcione de maneira efetiva, é necessário que o número de pontos superconvergentes presentes no padrão seja igual ou superior ao número de coeficientes do vetor de incógnitas  $\mathbf{a}_j$  (COOK *et al.*, 2002). Em caso contrário, Zienkiewicz e Zhu (1992a) recomendam que se empregue o polinômio aproximador do padrão mais próximo.

### 3.6 ESTIMADOR DE RECUPERAÇÃO POR EQUILÍBRIO DE PADRÕES (REP)

Este processo de recuperação foi introduzido por Boroomand e Zienkiewicz (1997a). Do mesmo modo que os demais estimadores de erro apresentados anteriormente, parte-se da premissa de que o campo de tensões obtidas via MEF é, em geral, descontínuo. Assim, o objetivo é substituí-lo em todos os padrões por um sistema recuperado que seja suave e contínuo. Para que isso seja possível, procede-se de maneira similar ao estimador SPR.

No MEF, para um problema de elasticidade plana, a equação de equilíbrio governante para os elementos que compõem um padrão  $\Omega_p$  pode ser expressa como

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0, \quad (3.40)$$

sendo  $\mathbf{B}$  a matriz das derivadas das funções de forma elementares,  $\hat{\sigma}$  o campo de tensões obtidas da solução de elementos finitos,  $\mathbf{b}$  o vetor de forças distribuídas de corpo e  $\mathbf{t}$  o vetor de forças distribuídas no contorno  $\Gamma_p$  do padrão.

Neste caso, uma expansão polinomial pode ser escrita para o vetor de tensões recuperadas ( $\sigma_{Rp}^*$ ) no  $i$ -ésimo nó entorno de um padrão específico como

$$\sigma_{Rp}^* = \mathbf{P}^* \mathbf{a}, \quad (3.41)$$

sendo  $\mathbf{P}^*$  uma matriz de funções de aproximação e  $\mathbf{a}$  o vetor dos coeficientes incógnitas do polinômio de recuperação. Neste caso,  $\mathbf{P}^*$ ,  $\mathbf{a}$  e  $\sigma_{Rp}^*$  são dados por

$$\sigma_{Rp}^* = \begin{bmatrix} \sigma_{j=1}^i \\ \sigma_{j=2}^i \\ \sigma_{j=3}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^i \\ \sigma_y^i \\ \tau_{xy}^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{j=1} \\ \mathbf{a}_{j=2} \\ \mathbf{a}_{j=3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}(x,y) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{P}}(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{P}}(x,y) \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

onde  $\bar{\mathbf{P}}(x,y)$  é um vetor ( $1 \times q$ ) que contém os termos polinomiais nas coordenadas ( $x, y$ ),  $\mathbf{a}_j$  é um vetor de incógnitas ( $q \times 1$ ) para cada  $j$ -ésima componente de tensão recuperada no  $i$ -ésimo nó ( $\sigma_j^i$ ) e  $q$  é o número de termos utilizado para formar a base polinomial de ordem  $p$ . Em um problema plano, supondo um elemento triangular linear (CST), o vetor de polinômios pode ser posto como:

$$\begin{array}{ll} \text{Caso geral:} & \bar{\mathbf{P}}(x,y) = [1, x, y, \dots, y^p]. \\ \text{Elemento CST:} & \bar{\mathbf{P}}(x,y) = [1, x, y]. \end{array} \quad (3.43)$$

A ideia central desse estimador é que deve-se sempre garantir que as tensões suavizadas  $\sigma_{Rp}^*$  satisfaçam, ao menos em um sentido de mínimos quadrados, as mesmas condições de equilíbrio do padrão que a solução por elementos finitos. Logo



$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega \approx \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_{Rp}^* d\Omega. \quad (3.44)$$

Porém, segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), na prática as restrições provindas da Eq.(3.40) podem gerar singularidades no processo de minimização da distância quadrática  $\Pi$ . Desta forma, uma maneira alternativa é definir os requisitos de equilíbrio sobre cada componente de tensão isoladamente. Isso pode ser obtido expressando as tensões como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{Rp}^* &= \sum_j \mathbf{1}_j \sigma_j^i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_1^i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \sigma_2^i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma_3^i = \sum_j (\boldsymbol{\sigma}_{Rp}^*)_j \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \sum_j \mathbf{1}_j \hat{\sigma}_j^i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\sigma}_1^i + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\sigma}_2^i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{\sigma}_3^i = \sum_j \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j \end{aligned} \quad (3.45)$$

e impondo o conjunto de restrições

$$\int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j d\Omega \approx \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\sigma}_{Rp}^*)_j d\Omega = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \mathbf{1}_j \bar{\mathbf{P}}(x, y) d\Omega \mathbf{a}_j. \quad (3.46)$$

A imposição da equação aproximada anterior faz com que cada conjunto de coeficientes  $\mathbf{a}_j$  seja resolvido independentemente, reduzindo consideravelmente o custo da solução. Nesse caso, o funcional de distância quadrática para a  $j$ -ésima componente de tensão é dado por

$$\Pi_j = \Pi(\mathbf{a}_j) = (\mathbf{H}_j \mathbf{a}_j - \mathbf{f}_j^p)^T (\mathbf{H}_j \mathbf{a}_j - \mathbf{f}_j^p), \quad (3.47)$$

onde

$$\mathbf{H}_j = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \mathbf{1}_j \bar{\mathbf{P}} d\Omega \quad (3.48)$$

e

$$\mathbf{f}_j^p = \int_{\Omega_p} \mathbf{B}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j d\Omega. \quad (3.49)$$

Assim, a aplicação da condição necessária de primeira ordem para a minimização de  $\Pi_j$  resulta em

$$\mathbf{a}_j = \left( \mathbf{H}_j^T \mathbf{H}_j \right)^{-1} \mathbf{H}_j^T \mathbf{f}_j^p. \quad (3.50)$$

Essa abordagem pode se mostrar instável para alguns problemas. Geralmente, isto pode ser eliminado realizando um processo de minimização do funcional modificado  $\Pi_j^*$ , dado por

$$\Pi_j^* = \Pi_j^*(\mathbf{a}_j) = \left( \mathbf{H}_j \mathbf{a}_j - \mathbf{f}_j^p \right)^T \left( \mathbf{H}_j \mathbf{a}_j - \mathbf{f}_j^p \right) + \sum_e \omega \left( \mathbf{H}_j^e \mathbf{a}_j - \mathbf{f}_j^e \right)^T \left( \mathbf{H}_j^e \mathbf{a}_j - \mathbf{f}_j^e \right), \quad (3.51)$$

onde os termos adicionados representam uma modificação em elementos individuais, ou seja,  $\mathbf{H}_j^e$  é uma matriz característica de cada elemento, calculada pela Eq. (3.48) salvo que a integração ocorre somente no domínio do elemento e  $\mathbf{f}_j^e$  é um vetor característico de cada elemento, dado pela Eq. (3.49) aplicada também somente no domínio do elemento. Neste caso,  $\omega$  é uma constante pré-estabelecida via experimentos numéricos, a qual varia entre zero e um valor limite. Para os problemas do corrente trabalho  $\omega$  varia entre 1 e 10. Com isso, o vetor de coeficientes resultante dessa abordagem é dado por

$$\mathbf{a}_j = \left[ \mathbf{H}_j^T \mathbf{H}_j + \omega \sum_e \left( \mathbf{H}_j^e \right)^T \mathbf{H}_j^e \right]^{-1} \left[ \mathbf{H}_j^T \mathbf{f}_j^p + \omega \sum_e \left( \mathbf{H}_j^e \right)^T \mathbf{f}_j^e \right]. \quad (3.52)$$

Uma vez determinados os coeficientes do polinômio, substituem-se as coordenadas do nó central do padrão na Eq. (3.41) para obter as componentes do vetor de tensões recuperadas no nó em questão. Aplicando o mesmo procedimento para todas as componentes de tensão do nó e para todos os nós da malha é possível obter todos os valores recuperados de tensão. Com isso, emprega-se a Eq. (3.25) para obter a distribuição das tensões no interior de cada elemento do domínio.

Considerando os nós localizados sobre o contorno, como posto por Zienkiewicz e Taylor (2000), o estimador REP segue a mesma metodologia que o SPR, ou seja, não ocorre a montagem dos padrões nos mesmos. Percebe-se ainda, um mesmo nível de precisão de ambos os estimadores.

### 3.7 DEFINIÇÃO DOS CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA DO PROCESSO ADAPTATIVO

Considera-se que uma solução é convergente e aceitável caso satisfaça dois critérios: um em nível global, e outro em nível elementar (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987, OÑATE; BUGEDA, 1993). O primeiro diz respeito à **convergência global** e requer que o erro global na norma em energia para a malha  $k$   $\|\mathbf{e}_k\|$  não ultrapasse um percentual da energia de deformação total  $\|\mathbf{u}_k\|_E$ , ou seja

$$\|\mathbf{e}_k\| \leq \bar{\eta} \|\mathbf{u}_k\|_E, \quad (3.53)$$

onde  $\bar{\eta}$  é o valor do erro relativo percentual admissível global especificado pelo analista. Desta maneira, define-se o parâmetro de erro global,  $\zeta_g$ , como

$$\zeta_g = \frac{\|\mathbf{e}_k\|}{\bar{\eta} \|\mathbf{u}_k\|_E}, \quad (3.54)$$

sendo que valores de  $\zeta_g \leq 1$  indicam satisfação do critério de convergência global. Em caso contrário,  $\zeta_g > 1$  indica que a malha não está adequada.

A distribuição dos elementos na malha deve satisfazer um critério de malha ótima, como, por exemplo, o critério de equidistribuição de erro. Deste modo um **critério de convergência local** também necessita ser satisfeito. Esta condição local pode ser expressa por

$$\|\mathbf{e}\|_{ie} \leq \|\mathbf{e}\|_{lim}, \quad (3.55)$$

onde  $\|\mathbf{e}\|_{ie}$  é o erro no *ie*-ésimo elemento e  $\|\mathbf{e}\|_{lim}$  representa o erro limite por elemento, o qual é dependente do critério de malha adotado. Assim, segundo Oñate e Bugeda (1993), define-se o parâmetro de erro local elementar  $\bar{\zeta}_{ie}$  como

$$\bar{\zeta}_{ie} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{ie}}{\|\mathbf{e}\|_{lim}}. \quad (3.56)$$

Observe que um parâmetro de erro local elementar igual à unidade remete a um elemento com tamanho ótimo, de modo que satisfaz a Eq. (3.55). A definição do erro limite elementar é, em geral, a principal diferença entre os vários critérios de malhas existente e afeta diretamente a distribuição dos elementos na malha (OÑATE; BUGEDA, 1993).

Deste modo, pode-se definir um único parâmetro com o objetivo de satisfazer ambos os critérios de convergência simultaneamente, denominado parâmetro de refinamento elementar  $\zeta_{ie}$ , determinado pela multiplicação de  $\zeta_g$  e  $\bar{\zeta}_{ie}$  (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987) e dado por

$$\zeta_{ie} = \zeta_g \bar{\zeta}_{ie} = \frac{\|\mathbf{e}_k\|}{\bar{\eta} \|\mathbf{u}_k\|_E} \frac{\|\mathbf{e}\|_{ie}}{\|\mathbf{e}\|_{lim}}. \quad (3.57)$$

### 3.8 CRITÉRIOS DE MALHA ÓTIMA

Observa-se que, tendo em mãos os estimadores de erro apresentados anteriormente, o erro na norma em energia pode ser determinado localmente para cada elemento. Deste modo, caso o erro avaliado em cada elemento atenda os critérios de convergência local e global, a análise pode ser classificada como convergente e precisa.

Com isso, ao se buscar a nova malha, aqui denotada malha ótima, há o questionamento: O que caracteriza a malha ótima?

Existem duas propostas predominantes na literatura. A primeira baseia-se no conceito de equidistribuição do erro, ou seja, cada elemento deve ter o mesmo valor do erro. O segundo critério baseia-se na uniformidade da densidade do erro. Ou seja, o erro em cada elemento por sua área é um valor constante ao longo do domínio.

Esses critérios são apresentados em detalhes a seguir.

#### 3.8.1 Critério de equidistribuição do erro elementar

Um critério clássico de malha ótima adotado por muitos autores (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; WIBERG; ABDULWAHAB, 1997; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; CASTELLAZZI *et al.*, 2010; entre outros) e introduzido inicialmente por Zienkiewicz e Zhu (1987), consiste na equidistribuição do erro elementar avaliado na norma em energia. Assim, o erro permitido total para a nova malha  $\|\mathbf{e}_{k+1}\|$  é determinado como

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\| = \bar{\eta} \|\mathbf{u}_{k+1}\|_E \approx \bar{\eta} \left[ \|\hat{\mathbf{u}}_k\|_E^2 + \|\mathbf{e}_k\|^2 \right]^{1/2}, \quad (3.58)$$

onde utiliza-se o conceito de que o erro ( $\mathbf{e}_k$ ) é ortogonal à solução aproximada ( $\hat{\mathbf{u}}_k$ ) (CIARLET, 2002):

$$\|\mathbf{u}_k\|_E^2 = \|\hat{\mathbf{u}}_k\|_E^2 + \|\mathbf{e}_k\|^2. \quad (3.59)$$

Assim, é possível expressar o erro total na malha corrente,  $\|\mathbf{e}_k\|$ , como

$$\|\mathbf{e}_k\|^2 = \sum_{ie=1}^N \|\mathbf{e}\|_{ie}^2, \quad (3.60)$$

onde  $N$  é o número total de elementos. Supondo um valor constante para o erro em cada elemento, e denotado por  $\bar{e}$ , tem-se para a próxima malha

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|^2 = N\bar{e}^2. \quad (3.61)$$

Rearranjando, o erro médio em cada elemento é dado por

$$\bar{e} = \left( \frac{\|\mathbf{e}_{k+1}\|^2}{N} \right)^{1/2}. \quad (3.62)$$

Portanto, o erro médio em cada elemento (objetivo do remalhamento) deve satisfazer a relação

$$\bar{e} \leq \bar{\eta} \left[ \frac{\|\hat{\mathbf{u}}_k\|_E^2 + \|\mathbf{e}_k\|^2}{N} \right]^{1/2}. \quad (3.63)$$

Dessa maneira, pode-se definir o erro limite para cada elemento na próxima malha como

$$\|\mathbf{e}\|_{lim} = \bar{\eta} \left[ \frac{\|\hat{\mathbf{u}}_k\|_E^2 + \|\mathbf{e}_k\|^2}{N} \right]^{1/2}. \quad (3.64)$$

Logo o parâmetro de refinamento elementar  $\zeta_{ie}$  (Eq. 3.57) pode ser escrito como

$$\zeta_{ie} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{ie}}{\bar{\eta} \|\mathbf{u}_k\|_E} \sqrt{N}. \quad (3.65)$$

Deste modo, uma metodologia alternativa consiste em executar progressivamente o refinamento somente em determinado número de elementos nos quais  $\zeta_{ie}$  é maior do que o limite específico e que o novo tamanho do elemento seja dado por

$$h_{k+1} = \frac{h_k}{2}, \quad (3.66)$$

onde  $h$  é um parâmetro que indica o tamanho do elemento. Esse processo é denominado enriquecimento  $h$  da malha (*mesh enrichment*) e, embora, em geral resulte em uma solução satisfatória, muitas vezes possui um custo computacional elevado ocasionado pelas possíveis diversas malhas que necessitará até que a restrição do erro seja satisfeita completamente.

Assim, é mais eficiente tentar projetar a nova malha com base no critério da taxa de convergência assintótica para cada elemento. Nesse caso, considerando a ausência de singularidades no carregamento e na geometria, tem-se (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000)

$$\|\mathbf{e}_k\| \leq Ch^p, \quad (3.67)$$

onde  $C$  é uma constante dependente dos dados e  $p$  é a ordem polinomial do elemento. Considerando a situação limite entre duas malhas subsequentes ( $k$  e  $k+1$ ), para o elemento  $ie$  da malha  $k$  tem-se

$$\|\mathbf{e}_k\|_{ie} \leq Ch_{k,ie}^p \quad (3.68)$$

e para a malha  $k+1$  tem-se

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|_{ie} = Ch_{k+1,ie}^p = \|\mathbf{e}\|_{lim} \quad (3.69)$$

Dividindo a Equação (3.69) pela Equação (3.68) obtém-se

$$h_{k+1} = \frac{h_k}{\zeta_{ie}^{1/p}}, \quad (3.70)$$

sendo  $h_k$  o tamanho do elemento na malha  $k$ -ésima e  $h_{k+1}$  o novo tamanho do elemento.

### 3.8.2 Critério de equidistribuição do erro específico elementar ou uniformidade da densidade do erro

Considerando a definição do erro específico dado pela razão do quadrado do erro por unidade de área, Bugeda (1990) introduz um novo critério de malha ótima, o qual consiste na equidistribuição desse parâmetro, posto como

$$\frac{\|\mathbf{e}_k\|_{ie}^2}{|\Omega_{ie}|} = \frac{\|\mathbf{e}_k\|^2}{|\Omega|}. \quad (3.71)$$

Nesse caso,  $|\Omega_{ie}|$  e  $|\Omega|$  são a medida do elemento  $ie$ -ésimo da malha e a medida do domínio total, respectivamente. No caso de problemas planos, são representados pelas suas respectivas áreas.

Considerando que o erro em cada  $ie$ -ésimo elemento deve ser igual ou menor ao erro limite elementar, tem-se

$$\|\mathbf{e}\|_{lim} = \|\mathbf{e}_k\| \left( \frac{|\Omega_{ie}|}{|\Omega|} \right)^{1/2}. \quad (3.72)$$



O parâmetro de erro local elementar  $\bar{\zeta}_{ie}$ , definido pela razão entre o erro no  $ie$ -ésimo elemento e o erro limite elementar, pode ser expresso, para o corrente critério, como

$$\bar{\zeta}_{ie} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{ie}}{\|\mathbf{e}\|_{lim}} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{ie}}{|\Omega_{ie}|^{1/2}} \left[ \frac{\|\mathbf{e}_k\|}{|\Omega|^{1/2}} \right]^{-1} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{ie}}{\|\mathbf{e}_k\|} \left( \frac{|\Omega|}{|\Omega_{ie}|} \right)^{1/2}. \quad (3.73)$$

Realizando o produto entre o parâmetro de erro global ( $\zeta_g$ ) e o parâmetro de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ), obtém-se o parâmetro de refinamento elementar ( $\zeta_{ie}$ ) que busca satisfazer simultaneamente ambos os critérios de parada:

$$\zeta_{ie} = \bar{\zeta}_{ie} \zeta_g = \frac{\|\mathbf{e}\|_{ie}}{\eta \|\mathbf{u}_k\|_E} \left( \frac{|\Omega|}{|\Omega_{ie}|} \right)^{1/2}. \quad (3.74)$$

Note que a Eq. (3.74) é igual a Eq. (3.65) para o caso em que  $|\Omega|/|\Omega_{ie}| = N$ , isto é, quando todos os elementos possuem a mesma medida. Porém, para o caso de malhas não uniformes, os diferentes critérios geram malhas adaptativas diferentes (OÑATE; BUGEDA, 1993).

O novo tamanho de elemento é então obtido por meio da Eq. (3.70).

### 3.9 PARÂMETROS DA QUALIDADE DOS ESTIMADORES E DO PROCESSO ADAPTATIVO

Em geral, os trabalhos que discutem estimadores de erro apresentam como medidas de suas qualidades o índice de efetividade global ( $\theta$ ) e as taxas de convergência geradas. Embora esses parâmetros sejam uma boa medida para tal, não é possível visualizar o comportamento dos erros em nível elementar.

O corrente trabalho propõe a definição de uma medida da qualidade dos estimadores de erro, não somente por seu índice de efetividade global, mas

considerando todos os índices de efetividades elementares, denominado desvio do índice de efetividade, dado por

$$D_{\theta} = \sqrt{\frac{\sum_{ie=1}^N (\theta_{ie} - 1)^2}{N}}. \quad (3.75)$$

Nesse caso,  $\theta_{ie}$  é o índice de efetividade elementar e expressa a razão entre o erro estimado no  $ie$ -ésimo elemento e o erro verdadeiro no mesmo elemento. Esse parâmetro é dado por

$$\theta_{ie} = \frac{\|\mathbf{e}^*\|_{ie}}{\|\mathbf{e}\|_{ie}}. \quad (3.76)$$

Observa-se que, em uma estimativa de erro ideal,  $\theta_{ie} = 1$  para todos os elementos e, portanto,  $D_{\theta} = 0$ .

Além disso, uma medida da qualidade da malha adaptada também pode ser implementada utilizando a mesma definição. Dessa maneira, denomina-se de desvio do parâmetro do erro local elementar  $D_{\bar{\zeta}_{ie}}$  como sendo

$$D_{\bar{\zeta}_{ie}} = \sqrt{\frac{\sum_{ie=1}^N (\bar{\zeta}_{ie} - 1)^2}{N}}, \quad (3.77)$$

onde  $\bar{\zeta}_{ie}$  é dado pela Eq. (3.56) e varia para cada critério de malha ótima adotado.

Da mesma forma, em uma malha ótima,  $\bar{\zeta}_{ie} = 1$  para todos os elementos e, assim,  $D_{\bar{\zeta}_{ie}} = 0$  para a malha.

### 3.10 MEDIDA $h$ DO TAMANHO ELEMENTAR

Esta seção tem como objetivo a definição da medida  $h$  do tamanho elementar a ser empregada no corrente trabalho.

Para problemas unidimensionais, o parâmetro  $h$  é tomado simplesmente como o comprimento do seu respectivo elemento.

Por outro lado, para determinar uma medida do tamanho elementar de problemas planos empregando elementos triangulares, algumas considerações precisam ser realizadas. A primeira delas refere-se a considerar a área de qualquer elemento triangular da malha como sendo aproximadamente a área de um triângulo equilátero, ou seja, um elemento regular. A segunda está em considerar como medida do tamanho do elemento o lado de maior dimensão do triângulo (Reddy, 1986). Assim,  $h$  é dado por:

$$h = \text{maior aresta de } \Omega_e \approx \text{lado do triângulo equilátero,}$$

$$h = \left( \frac{4A_\Delta}{\sqrt{3}} \right)^{1/2}, \quad (3.78)$$

onde  $A_\Delta$  representa o valor da área do domínio do elemento  $\Omega_e$ .

## 4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de confrontar a eficiência dos distintos estimadores de erro e suas aplicações como guias de processos adaptativos, neste capítulo são apresentadas algumas aplicações em problemas lineares de engenharia. Todos os resultados numéricos aqui apresentados utilizam o processo de estimativa de erro e adaptatividade descritos anteriormente.

Cada problema proposto foi separado em duas seções. A primeira apresenta o desempenho dos vários estimadores de erro quando submetidos a sucessivos refinamentos uniformes, possibilitando, assim, a obtenção das taxas de convergência do erro e levantamento de outras características desejáveis em estimadores de erro. A segunda tem por objetivo discutir e comparar as características e eficiência em níveis global e elementar dos diversos estimadores de erro como guias do processo  $h$ -adaptativo, utilizando diferentes critérios de malha ótima.

A avaliação da eficiência dos vários estimadores aplicados ao processo adaptativo é conseguida através de uma comparação entre variáveis que caracterizam o processo e a malha em análise.

### 4.1 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

De modo a possibilitar o acoplamento de rotinas de análise do MEF com  $h$ -adaptatividade, quatro estruturas independentes são implementadas. A primeira refere-se ao problema unidimensional de barra biengastada e a segunda ao problema unidimensional de viga fina de Euler-Bernoulli, sendo ambas implementadas inteiramente no software Matlab. No caso do problema plano de condução térmica e do problema de elasticidade plana são empregadas duas estruturas básicas: MEFHADAP e ARANHA++ (FANCELLO *et al.*, 1990). A primeira refere-se ao algoritmo de MEF com  $h$ -adaptatividade, na qual estão programadas o MEF e as formulações referentes aos cálculos de erro e geração da nova malha apresentadas no Capítulo 3. A estrutura ARANHA++ foi desenvolvida por Fancello *et al.* (1990) e possibilita uma geração automática de malhas em domínios

bidimensionais planos para elemento CST e LST, sendo sua implementação baseada em técnicas não estruturadas frontais.

Por outro lado, para a verificação das taxas de convergências e análise comparativa entre os diversos estimadores aplicados a cada problema plano empregando somente refinamentos uniformes, não se faz necessária a utilização da estrutura ARANHA++.

O processo iterativo de busca por uma solução aceitável, quando da aplicação do processo adaptativo, pode ser resumido para cada problema como:

***Algoritmo Global de acoplamento do MEF com h-Adaptatividade:***

***Passo 1:*** Geração da Malha

***Passo 2:*** Solução do problema via MEF.

***Passo 3:*** Cálculo do erro.

***Passo 4:*** Verificação da convergência dos critérios de parada:

*Em caso positivo, finaliza o processo e salva os resultados.*

***Passo 5:*** Se não ocorreu convergência, continua o processo:

*Projeta e cria a nova malha e retorna ao Passo 2.*

## 4.2 PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE BARRA – REFINO UNIFORME

O primeiro problema considerado é dado por uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem elíptica que engloba uma grande quantidade de problemas físicos. No corrente problema tem-se uma barra retilínea, elástica e isotrópica, considerando somente deslocamentos e deformações axiais. O objetivo é encontrar a solução  $u(x)$  que satisfaça a forma forte

$$\begin{aligned} -EA \frac{d^2 u}{dx^2} &= f(x), \quad \forall \quad x \in \Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}^1, \\ u(x=0) &= 0 \quad \text{e} \quad u(x=1) = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Note-se que as condições de contorno são do tipo Dirichlet homogêneas. Aqui é considerado que o produto entre o módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) e a área

da seção transversal da barra ( $A$ ) é igual à unidade, o que não retira a generalidade das análises.

Ainda, pode-se enunciar o problema de valor de contorno posto pela Eq. (4.1), através de sua forma variacional equivalente:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } u(x) \in H_0^1(\Omega) \text{ que satisfaz} \\ &EA \int_{\Omega} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall \quad v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Definindo:

$$\begin{aligned} B(u, v) &= EA \int_{\Omega} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} d\Omega \quad e \\ I(v) &= \int_{\Omega} f v d\Omega, \end{aligned} \quad (4.3)$$

pode-se resumir a Eq. (4.2) ao seguinte problema de valor de contorno variacional:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } u(x) \in H_0^1(\Omega) \text{ que satisfaz} \\ &B(u, v) = I(v), \quad \forall \quad v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde  $B(\cdot, \cdot)$  é a forma bilinear contínua associada ao problema e definida em  $H_0^1 \times H_0^1$ ,  $v$  é uma função de variação cinematicamente admissível e  $I(\cdot)$  é um funcional contínuo e linear. Por sua vez,  $H_0^1$  denota o espaço de Hilbert de primeira ordem com suporte compacto em  $\Omega$ , ou seja, a função e sua primeira derivada são quadraticamente integráveis e se anulam no contorno.

No corrente problema,  $f(x)$  é imposta de forma a produzir perturbações locais na solução  $u(x)$ , gerando elevados gradientes nessa região. Assim, partindo de uma solução fabricada, utiliza-se o termo fonte dado por (NOVOTNY *et al.*, 2000)

$$f(x) = 2\alpha \left[ \frac{1}{1 + \alpha^2(x - x_0)^2} + \frac{\alpha^2(x - x_0)(1 - x)}{\left[1 + \alpha^2(x - x_0)^2\right]^2} \right]. \quad (4.5)$$

Dessa forma, a solução exata da forma forte, Eq.(4.1), é

$$u(x) = (1 - x) \left[ \tan^{-1} \alpha(x - x_0) + \tan^{-1} \alpha x_0 \right], \text{ sendo } x_0 = 4/9 \text{ e } \alpha = 100. \quad (4.6)$$

Na Figura 2 é possível observar as deformações analíticas e o termo fonte em função do comprimento da barra.

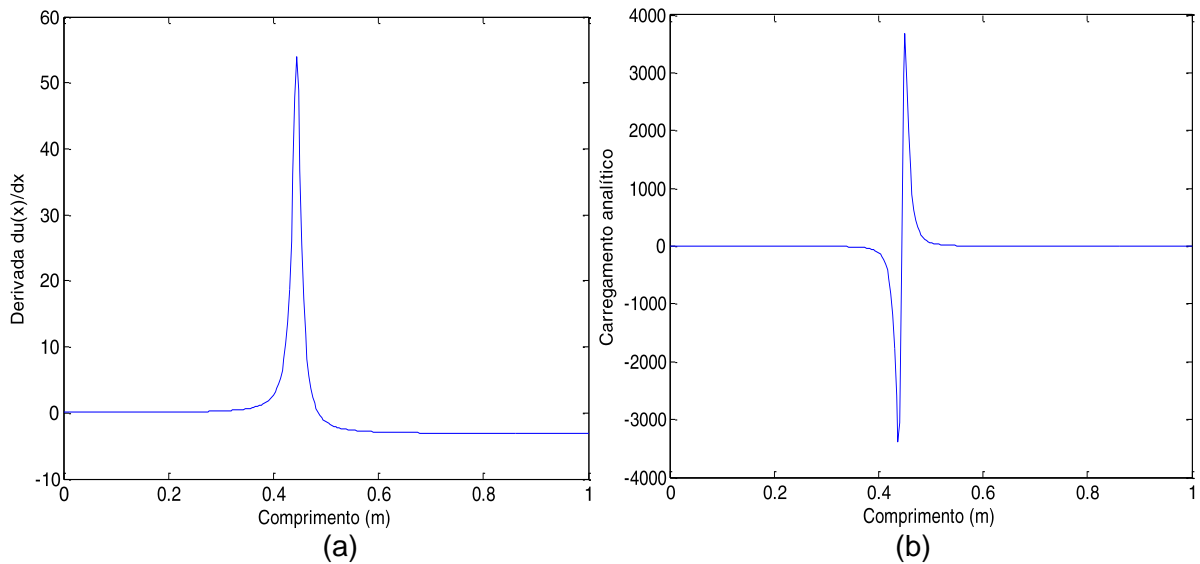


Figura 2 – Problema 1: (a) Deformações analíticas ( $\alpha = 100$ ). (b) Carregamento analítico.

Inicialmente, o objetivo é estudar o comportamento dos diversos estimadores de erro anteriormente apresentados através de um refino uniforme da malha onde, em cada iteração, o número de elementos na malha é aumentado. Este processo é aplicado para os elementos linear e quadrático, sendo os resultados apresentados nas Tabelas 1 e 2, respectivamente. Como medida da eficiência dos vários estimadores de erro, são utilizados quatro parâmetros principais: erro relativo percentual global ( $\eta$ ), índice de efetividade global ( $\theta$ ), número de graus de liberdade ( $NGL$ ) e desvio do índice de efetividade ( $D_\theta$ ), conforme definidos no Capítulo 3.

Por meio das Figuras 3 e 4 observam-se as taxas de convergência do erro e do índice de efetividade global em função do número de graus de liberdade na malha para os elementos linear e quadrático, respectivamente.

Tabela 1 - Resultados do Problema 1: Elemento linear e refino uniforme.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5	Malha 6
<b>Média Nodal Simples (MNS)</b>	$\eta$	37,69%	27,13%	13,71%	6,62%	3,23%	1,60%
	$\theta$	0,8968	1,3451	1,0906	1,0428	1,0126	1,0033
	$NGL$	41	81	161	321	641	1281
	$D_\theta$	0,63	0,27	0,06	0,07	0,12	0,09
<b>Zienkiewicz e Zhu (ZZ)</b>	$\eta$	34,95%	24,88%	12,66%	6,38%	3,19%	1,60%
	$\theta$	0,8219	1,2259	1,0050	1,0046	1,0012	1,0003
	$NGL$	41	81	161	321	641	1281
	$D_\theta$	0,76	0,09	0,02	0,02	0,02	0,02
<b>Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)</b>	$\eta$	37,69%	27,13%	13,71%	6,62%	3,23%	1,60%
	$\theta$	0,8968	1,3451	1,0906	1,0428	1,0126	1,0033
	$NGL$	41	81	161	321	641	1281
	$D_\theta$	0,63	0,27	0,06	0,07	0,12	0,09
<b>Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)</b>	$\eta$	37,69%	27,13%	13,71%	6,62%	3,23%	1,60%
	$\theta$	0,8968	1,3451	1,0906	1,0428	1,0126	1,0033
	$NGL$	41	81	161	321	641	1281
	$D_\theta$	0,63	0,27	0,06	0,07	0,12	0,09

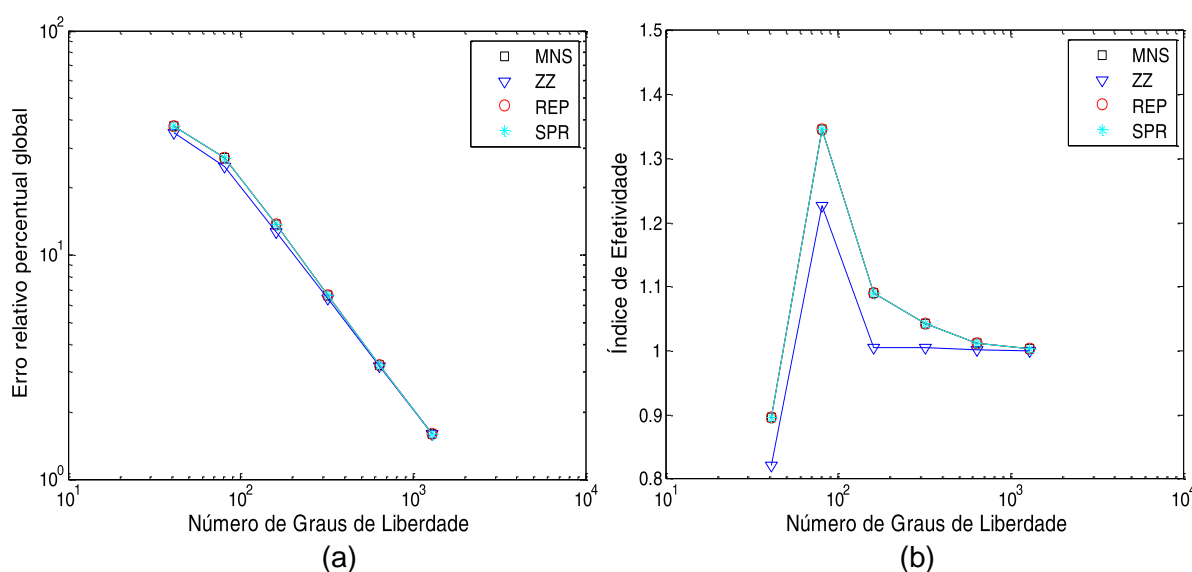


Figura 3 – Problema 1: (a) Erro relativo percentual global para elemento linear. (b) Índice de efetividade global para elemento linear.



Percebe-se, para o elemento linear, que todos os estimadores apresentam excelentes resultados, com um índice de efetividade ( $\theta$ ) tendendo à unidade e o desvio do índice de efetividade ( $D_\theta$ ) tendendo a zero à medida que o número total de graus de liberdade na malha ( $NGL$ ) é aumentado. Além disso, os estimadores baseados em padrões, REP, SPR e MNS, mostraram-se equivalentes para elementos lineares aplicados ao corrente problema (BOROOMAND; ZIENKIEWICZ, 1997a).

Uma dificuldade encontrada foi a instabilidade apresentada pelo estimador REP no cálculo do vetor de coeficientes incógnitas para o presente problema, a qual foi eliminada realizando a minimização do funcional modificado  $\Pi^*$  sugerido por Zienkiewicz e Taylor (2000) e dado pela Eq. (3.51). Cabe ressaltar que, para elementos lineares, há uma grande discrepância em termos de simplicidade de implementação, sendo que o estimador MNS é mais vantajoso neste aspecto.

Tabela 2 - Resultados do Problema 1: Elemento quadrático e refino uniforme.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5	Malha 6
<b>Média Nodal Simples (MNS)</b>	$\eta$	15,99%	6,92%	0,96%	0,17%	0,02%	0,0031%
	$\theta$	1,0865	0,8319	0,5912	0,3960	0,2145	0,1096
	$NGL$	81	161	321	641	1281	2561
	$D_\theta$	0,90	0,82	0,90	0,95	0,97	0,99
<b>Zienkiewicz e Zhu (ZZ)</b>	$\eta$	14,90%	6,30%	0,88%	0,17%	0,02%	0,0030%
	$\theta$	1,0106	0,7579	0,5433	0,3751	0,2100	0,1090
	$NGL$	81	161	321	641	1281	2561
	$D_\theta$	0,87	0,81	0,90	0,95	0,97	0,99
<b>Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)</b>	$\eta$	23,72%	10,07%	1,78%	0,43%	0,11%	0,03%
	$\theta$	1,6377	1,2138	1,0994	0,9687	0,9831	0,9953
	$NGL$	81	161	321	641	1281	2561
	$D_\theta$	0,70	0,20	0,05	0,05	0,01	0,03
<b>Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)</b>	$\eta$	29,12%	13,55%	1,97%	0,43%	0,11%	0,03%
	$\theta$	2,0417	1,6410	1,2174	0,9735	0,9758	0,9926
	$NGL$	81	161	321	641	1281	2561
	$D_\theta$	1,05	0,35	0,09	0,08	0,02	0,02

Por outro lado, considerando uma discretização com elementos quadráticos, somente os estimadores de erro baseados em padrões, SPR e REP, mostraram-se efetivos na medida do erro para o corrente problema. Isso pode ser comprovado, tanto pelo índice de efetividade global quanto pelo desvio do índice de efetividade.

Para tentar explicar esse comportamento podem ser observadas, através da Figura 5, as soluções recuperadas na terceira malha, para os estimadores MNS, ZZ e SPR.

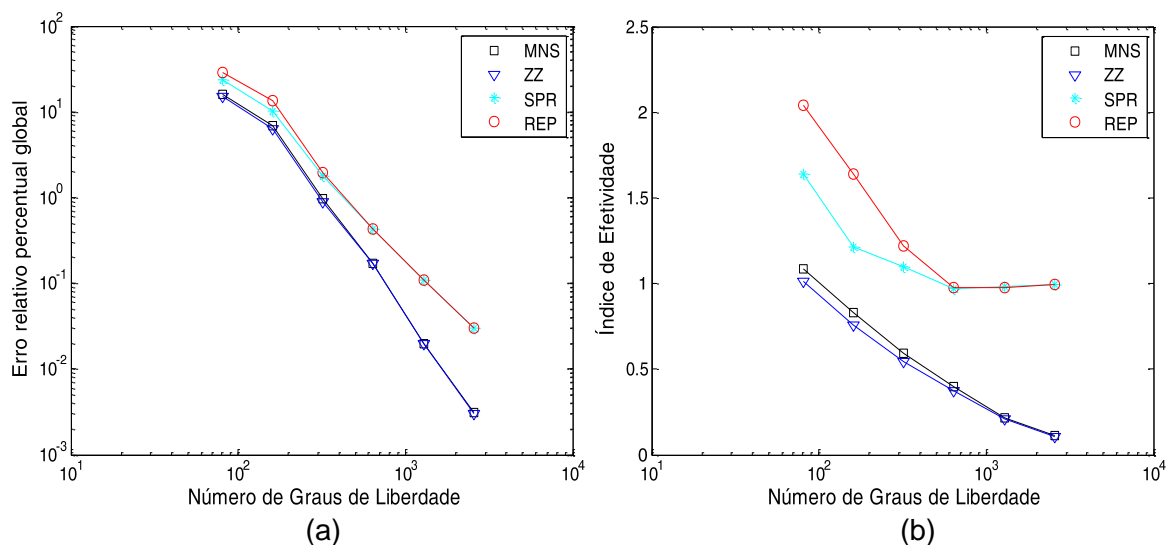


Figura 4 – Problema 1: (a) Erro relativo percentual global para elemento quadrático. (b) Índice de efetividade global para elemento quadrático.

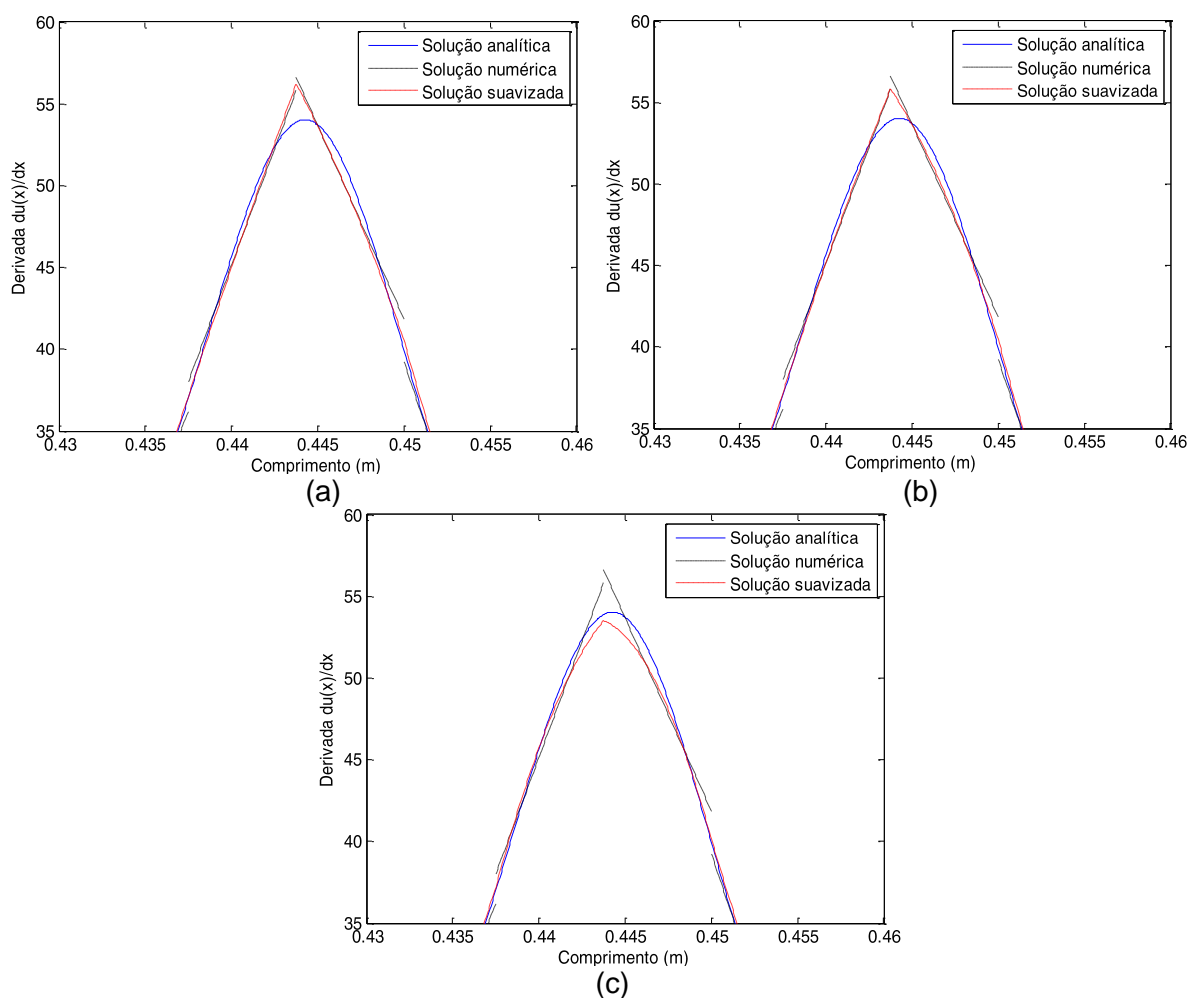


Figura 5 – Vistas ampliadas da solução recuperada: (a) MNS, (b) ZZ e (c) SPR.

Dessa maneira, as estimativas de erro realizadas pelos estimadores MNS e ZZ, quando aplicadas ao problema em análise utilizando elemento quadrático, mostram-se subestimadas em relação ao erro verdadeiro, característica essa evidenciada por possuir um índice de efetividade global menor que a unidade.

### 4.3 PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE BARRA – REFINO $h$ -ADAPTATIVO

Esta seção é dividida em duas subseções. Na primeira é apresentada uma análise dos estimadores de erro como guias de um processo  $h$ -adaptativo, utilizando para isso o critério de equidistribuição do erro elementar. Na segunda discute-se a influência dos critérios de malha ótima. São empregados tanto elementos lineares como quadráticos.

#### 4.3.1 Análise dos estimadores de erro como guia de um processo $h$ -adaptativo

Visando realizar uma análise comparativa da aplicação dos estimadores de erro, é solucionado o problema unidimensional anterior empregando o critério de equidistribuição do erro elementar.

Como medida da eficiência dos vários estimadores de erro como guias do processo adaptativo, é utilizado, além dos parâmetros empregados para o refino uniforme, o máximo valor do parâmetro de refinamento elementar ( $\zeta_{ie,máx}$ ) para o critério de malha ótima empregado.

Considera-se que uma solução é convergente e aceitável caso satisfaça dois critérios. O primeiro diz respeito à convergência global e requer que o erro relativo percentual global na malha não ultrapasse o erro relativo percentual admissível pré-estabelecido. De modo a garantir uma solução local aceitável, um segundo critério de parada estabelece que todos os parâmetros de erro local elementar estejam abaixo da unidade, indicando que nenhum elemento precisa reduzir seu tamanho.

Aqui é considerado um único critério de parada, como definido por Oñate e Bugeda (1993), dado por meio da Eq. (3.65), que procura atender ambos os critérios simultaneamente. Neste caso, espera-se que o parâmetro de refinamento elementar, o qual é definido pela multiplicação do parâmetro de erro global pelo parâmetro de

erro local elementar, esteja abaixo da unidade. Adicionando uma tolerância ao critério, deseja-se que nenhum parâmetro de refinamento elementar ultrapasse 1,2. Esse fator é determinado de modo que seja especificado, além de uma tolerância global do erro, um parâmetro que defina um critério local de quão próxima a malha se encontra da malha ótima.

São utilizados como parâmetros iniciais: elementos lineares, uma malha uniforme composta por 25 elementos e erro relativo percentual admissível de 1%. Através da Tabela 3 são apresentados os parâmetros que caracterizam o processo adaptativo. As soluções obtidas para elemento linear empregando os diferentes estimadores são apresentadas nas Figuras de 6 a 10.

Tabela 3 - Resultados do Problema 1: Elemento linear, refino  $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição do erro.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
<b>Média Nodal Simples (MNS)</b>	$\eta$	37,79%	0,68%	0,45%	-	-
	$\theta$	0,4969	0,9752	0,9978	-	-
	$NGL$	26	385	434	-	-
	$\zeta_{ie,máx}$	136,20	3,28	1,07	-	-
	$D_{\theta}$	1,68	0,46	0,16	-	-
<b>Zienkiewicz e Zhu (ZZ)</b>	$\eta$	34,80%	0,59%	0,56%	0,43%	0,42%
	$\theta$	0,4519	0,9855	0,9935	0,9975	0,9984
	$NGL$	26	386	447	495	510
	$\zeta_{ie,máx}$	107,13	1,62	1,60	1,64	0,99
	$D_{\theta}$	2,63	0,21	0,15	0,13	0,12
<b>Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)</b>	$\eta$	37,79%	0,73%	0,48%	-	-
	$\theta$	0,4969	1,0388	1,0042	-	-
	$NGL$	26	385	435	-	-
	$\zeta_{ie,máx}$	136,20	4,63	1,19	-	-
	$D_{\theta}$	1,68	0,08	0,07	-	-
<b>Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)</b>	$\eta$	37,79%	0,73%	0,48%	-	-
	$\theta$	0,4969	1,0388	1,0042	-	-
	$NGL$	26	385	435	-	-
	$\zeta_{ie,máx}$	136,20	4,63	1,19	-	-
	$D_{\theta}$	1,68	0,08	0,07	-	-

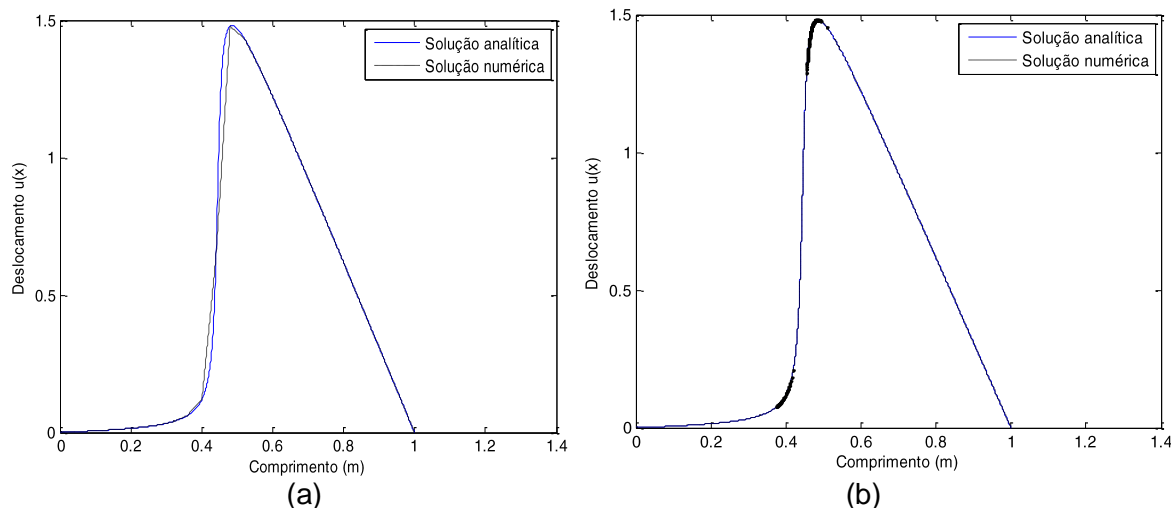


Figura 6 – Problema 1: Soluções adaptativas para o estimador MNS. (a) Deslocamentos para malha inicial (26 GL). (b) Deslocamentos após convergência (434 GL).

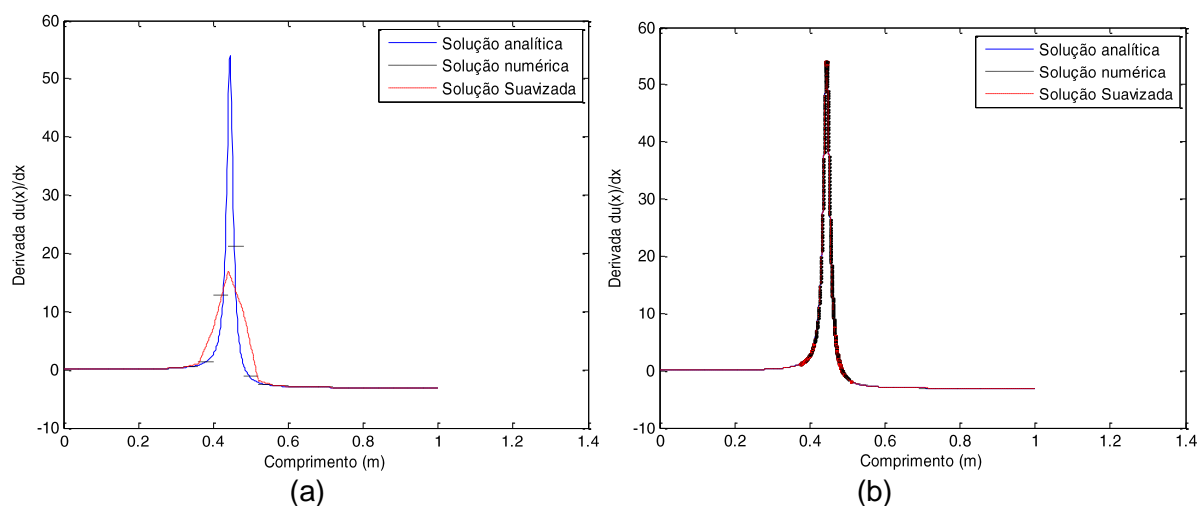


Figura 7 – Problema 1: Soluções adaptativas para o estimador MNS. (a) Deformações para malha inicial (26 GL). (b) Deformações após convergência (434 GL).

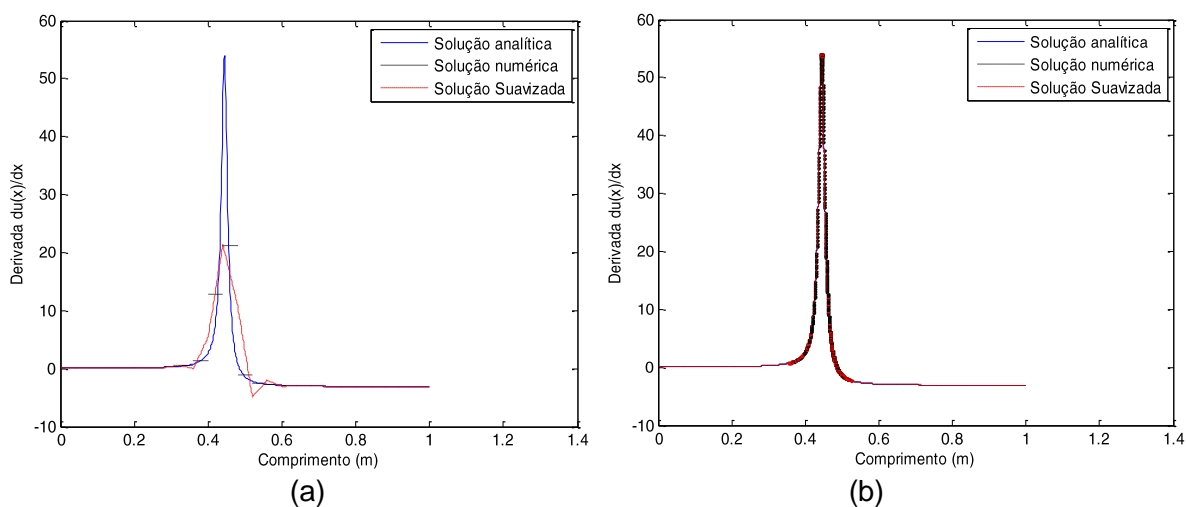


Figura 8 – Problema 1: Soluções adaptativas para o estimador ZZ. (a) Deformações para malha inicial (26 GL). (b) Deformações após convergência (510 GL).

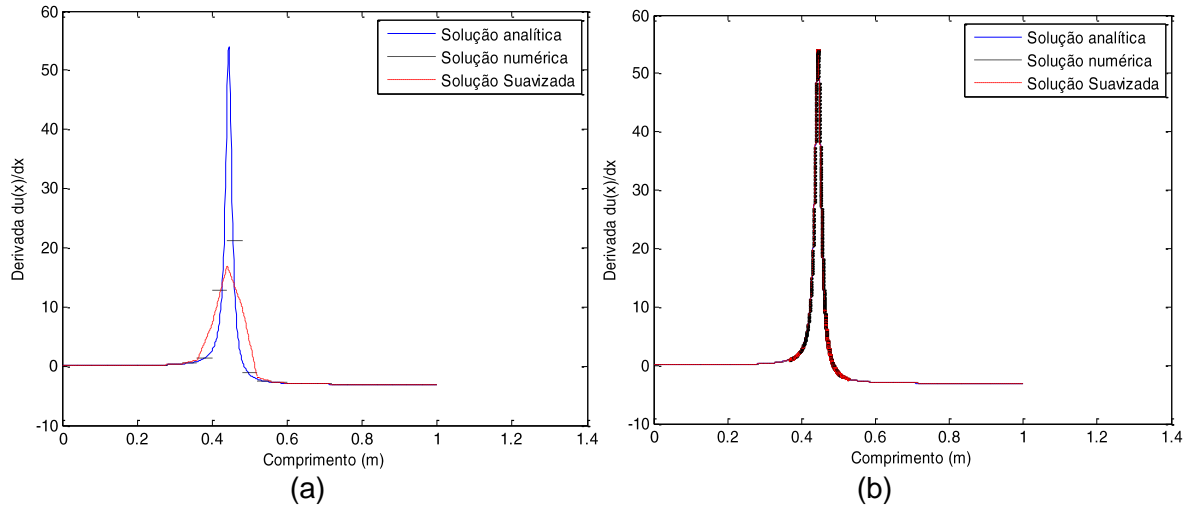


Figura 9 – Problema 1: Soluções adaptativas para o estimador SPR. (a) Deformações para malha inicial (26 GL). (b) Deformações após convergência (435 GL).

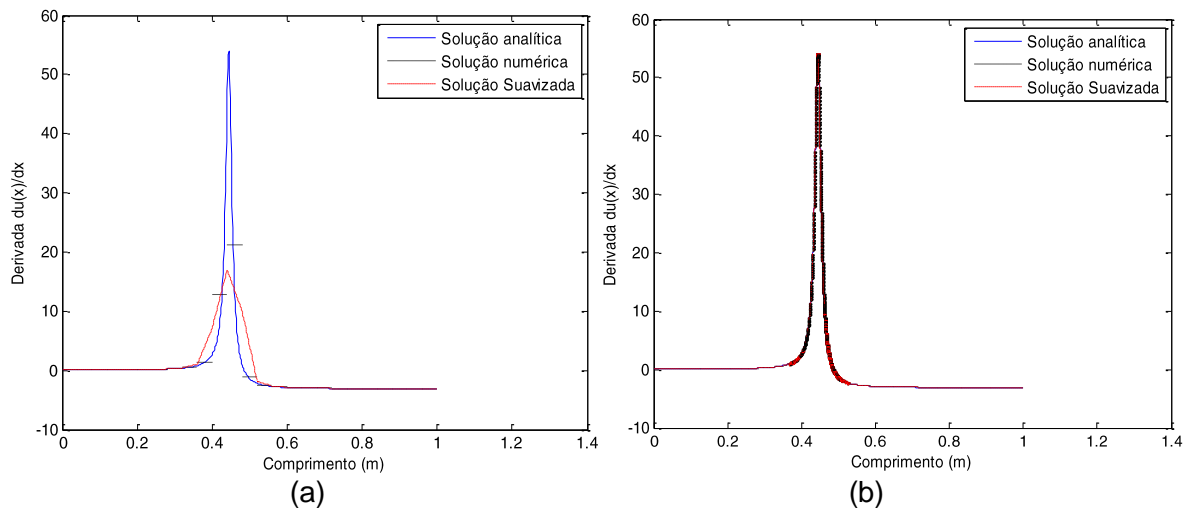


Figura 10 – Problema 1: Soluções adaptativas para o estimador REP. (a) Deformações para malha inicial (26 GL). (b) Deformações após convergência (435 GL).

Observa-se, através da Figura 6, que os erros analisados na variável primária são muito baixos, característica esta, que impossibilita a comparação dos estimadores de erros com base em gráficos referentes ao campo de deslocamentos. Logo, para os demais estimadores, somente as soluções do campo de deformações são apresentadas. Pode-se perceber que, mesmo para malhas não uniformes, quando o elemento linear é aplicado, todos os estimadores de erro mostram-se adequados. Este fato pode ser comprovado através da Tabela 3, onde são expostos os índices de efetividade globais ( $\theta$ ) e os desvios de índice de efetividade ( $D_\theta$ ). Além disso, os critérios de convergência local e global são atendidos para o corrente problema.

Por fim, são utilizados como parâmetros: elementos quadráticos, uma malha composta por 12 elementos e erro relativo percentual admissível de 1%. Através da Tabela 4 são apresentados os parâmetros que caracterizam o processo adaptativo.

Tabela 4 – Resultados do Problema 1: Elemento quadrático, refino  $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição do erro.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3
<b>Média Nodal Simples (MNS)</b>	$\eta$	34,40%	1,26%	0,27%
	$\theta$	0,5064	0,6254	0,4334
	$NGL$	25	65	79
	$\zeta_{ie,máx}$	84,23	4,15	1,08
	$D_{\theta}$	2,11	1,14	1,09
<b>Zienkiewicz e Zhu (ZZ)</b>	$\eta$	32,48%	1,22%	0,22%
	$\theta$	0,4748	0,5697	0,3640
	$NGL$	25	73	83
	$\zeta_{ie,máx}$	78,76	4,96	0,66
	$D_{\theta}$	3,69	0,58	0,75
<b>Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)</b>	$\eta$	44,72%	1,59%	0,28%
	$\theta$	0,6912	1,0708	0,9865
	$NGL$	25	75	91
	$\zeta_{ie,máx}$	121,52	7,25	0,62
	$D_{\theta}$	3,15	0,69	0,52
<b>Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)</b>	$\eta$	52,98%	1,77%	0,37%
	$\theta$	0,8635	1,2143	1,1542
	$NGL$	25	75	91
	$\zeta_{ie,máx}$	138,49	8,67	0,97
	$D_{\theta}$	3,87	1,74	1,51

De acordo com esses parâmetros é possível concluir que os estimadores baseados em padrões, REP e SPR, mostram-se efetivos na estimativa do erro quando da condução de um processo  $h$ -adaptativo para elemento quadrático, ou seja, possuem boas medidas do erro mesmo para malhas não uniformes. Destaca-se nesse sentido o estimador SPR por apresentar índices de efetividade globais ( $\theta$ ) mais próximos da unidade e desvios de índices de efetividade ( $D_{\theta}$ ) menores do que o estimador REP. Além disso, os estimadores MNS e ZZ apresentam índices de efetividade inferiores à unidade, ou seja, subestimam o erro ao longo da malha.

### 4.3.2 Influência do critério de malha ótima

Com o objetivo de avaliar as diferenças entre os critérios de malha de ótima, partindo-se dos mesmos parâmetros iniciais da seção anterior, é aplicado o critério de equidistribuição do erro específico (densidade de erro) utilizando o estimador SPR como guia do processo. Os resultados são apresentados na Tabela 5, sendo a solução adaptativa visualizada na Figura 11. Neste caso, como constatado por Oñate e Bugeda (1993) no contexto de outros problemas, fica evidente que os processos adaptativos são altamente dependentes dos critérios de malha ótima.

Tabela 5 – Problema 1: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador SPR, elemento linear e refino  $h$ -adaptativo.

Critério de malha ótima		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5	Malha 6
Equidistribuição do erro específico	$\eta$	37,79%	0,73%	0,62%	0,50%	0,58%	0,42%
	$\theta$	0,4969	1,0388	1,0486	1,0764	1,0443	1,1052
	$NGL$	26	385	687	869	976	1144
	$\zeta_{ie,máx}$	136,20	5,68	2,72	1,50	2,69	1,11
	$D_\theta$	1,68	0,08	0,07	0,05	0,18	0,15
Equidistribuição do erro	$\eta$	37,79%	0,73%	0,48%	-	-	-
	$\theta$	0,4969	1,0388	1,0042	-	-	-
	$NGL$	26	385	435	-	-	-
	$\zeta_{ie,máx}$	136,20	4,63	1,19	-	-	-
	$D_\theta$	1,68	0,08	0,07	-	-	-

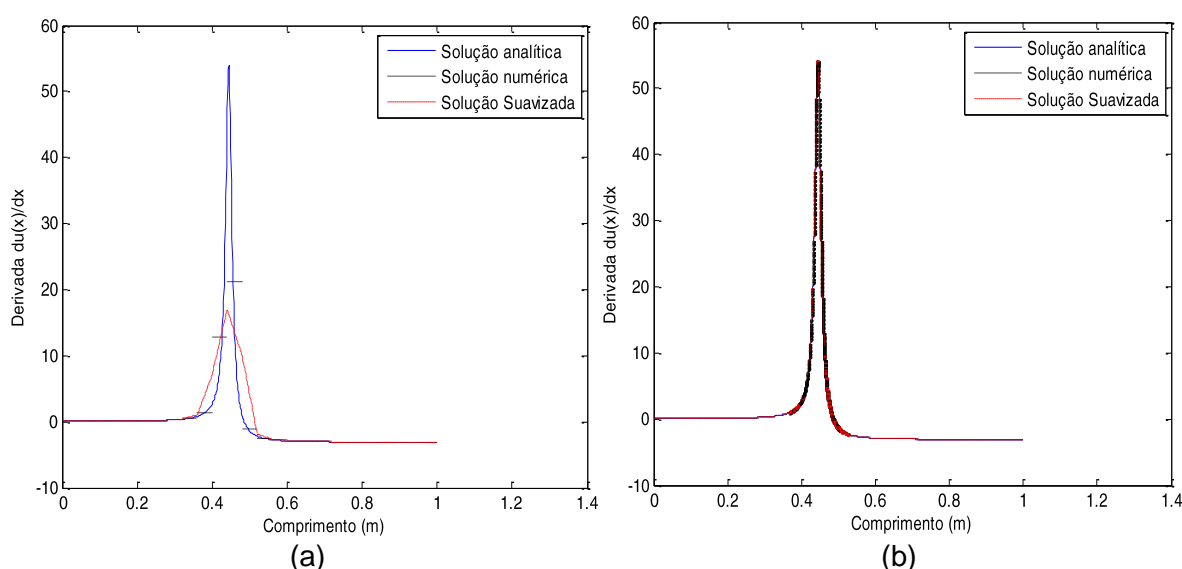


Figura 11 – Problema 1: Soluções adaptativas para Estimador SPR. (a) Deformações para malha inicial (26 GL). (b) Deformações após convergência (1144 GL).



Assim, para o problema abordado, como pode ser observado através da Figura 12, o critério de equidistribuição do erro específico tende a concentrar mais e menores elementos em regiões onde os gradientes são elevados. Com isso, o critério de equidistribuição de erro conduz a uma distribuição com um custo computacional inferior devido ao menor número de graus de liberdade.

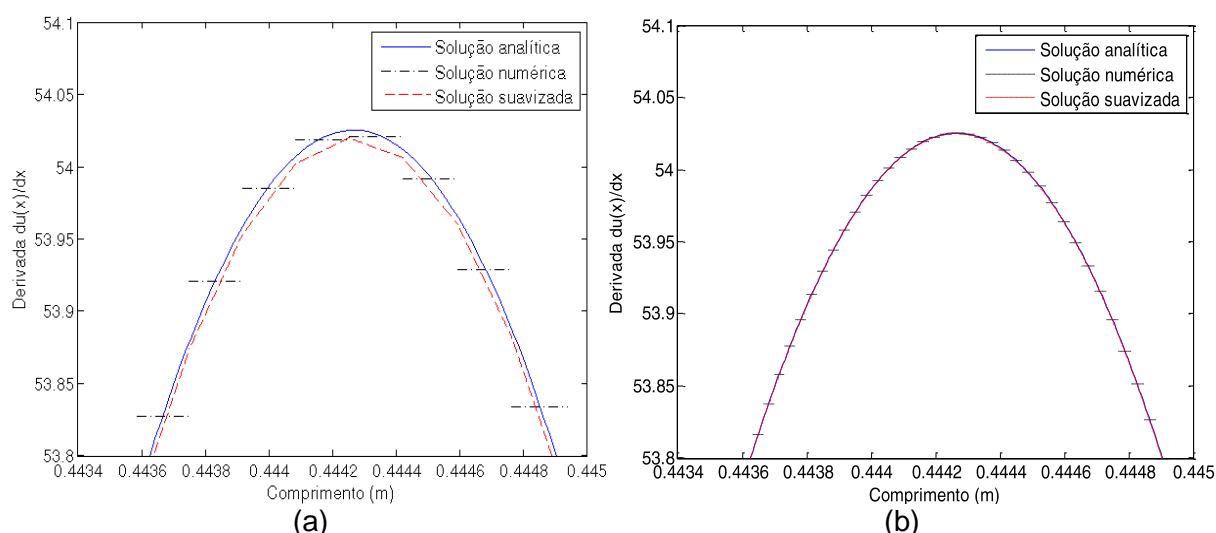


Figura 12 – Vista ampliada na recuperação por estimador SPR. (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de densidade do erro.

Por fim, os seguintes parâmetros são empregados: estimador SPR, elementos quadráticos, uma malha composta por 12 elementos e erro relativo percentual admissível de 1%. Através da Tabela 6 são expostos os parâmetros que caracterizam o processo adaptativo.

Tabela 6 – Problema 1: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador SPR, elemento quadrático e refino  $h$ -adaptativo.

Critério de malha ótima		Malha 1	Malha 2	Malha 3
Equidistribuição do erro específico	$\eta$	44,72%	1,59%	0,21%
	$\theta$	0,6912	1,0708	1,0204
	$NGL$	25	75	101
	$\zeta_{ie,máx}$	121,52	15,59	0,96
	$D_\theta$	3,15	0,69	0,55
Equidistribuição do erro	$\eta$	44,72%	1,59%	0,28%
	$\theta$	0,6912	1,0708	0,9865
	$NGL$	25	75	91
	$\zeta_{ie,máx}$	121,52	7,25	0,62
	$D_\theta$	3,15	0,69	0,52

Da mesma maneira que para elementos lineares, o critério de equidistribuição do erro específico atende aos critérios de convergência, porém, com um número de graus de liberdade superior ao do critério de equidistribuição do erro elementar.

#### 4.4 PROBLEMA PLANO DE CONDUÇÃO TÉRMICA – REFINO UNIFORME

Esta seção busca analisar o comportamento dos diferentes estimadores em tela considerando um problema linear plano de condução térmica. Inicialmente são realizados sucessivos refinamentos uniformes de forma a verificar o comportamento dos diversos estimadores de erro. Nesse caso, considerando um problema definido em um domínio  $\Omega$  e submetido unicamente a condições de contorno de Dirichlet homogêneas, tem-se que sua forma forte pode ser posta como (REDDY, 2006):

$$\begin{aligned} -\nabla(\mathbf{k}\nabla T) &= f \quad \text{em } \Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2 \\ T &= 0 \quad \text{em } \Gamma_T, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde  $T$  é o campo de temperaturas,  $\mathbf{k}$  a matriz de condutividade térmica (no corrente problema, considerada isotrópica),  $f$  a fonte interna de calor,  $\Gamma_T$  o contorno e  $\nabla$  é o operador gradiente, o qual pode ser expresso por

$$\nabla(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \mathbf{j}. \quad (4.8)$$

Neste caso, a forma variacional equivalente ao problema de valor de contorno dado pela Eq. (4.7) é expressa por:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } T(x,y) \in H_0^1(\Omega) \text{ que satisfaz} \\ &\int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{k} \nabla T \, d\Omega = \int_{\Omega} v f \, d\Omega, \quad \forall \quad v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Denotando:

$$\begin{aligned} B(T, v) &= \int_{\Omega} (\nabla v)^T \mathbf{k} \nabla T \, d\Omega \quad e \\ I(v) &= \int_{\Omega} v f \, d\Omega, \end{aligned} \quad (4.10)$$

pode-se resumir a Eq. (4.9) a:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } T(x, y) \in H_0^1(\Omega) \text{ que satisfaz:} \\ &B(T, v) = I(v), \quad \forall \quad v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $B(\cdot, \cdot)$  é a forma bilinear contínua associada ao problema e definida em  $H_0^1 \times H_0^1$ ,  $v$  é uma função de variação cinematicamente admissível,  $I(\cdot)$  é um funcional contínuo e linear.

A fonte interna de calor aplicada é tal que a solução analítica é dada por (CASTELLAZZI *et al.*, 2010; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000)

$$T(x, y) = x(1-x)y(1-y)\arctan[\alpha(\rho - \rho_0)], \quad (4.12)$$

sendo  $\rho = (x + y) / \sqrt{2}$ ,  $\rho_0 = 0,8$  e  $\alpha = 20$ . A Figura 13 representa a solução exata em termos de temperatura.

Este processo é aplicado para elementos triangulares lineares (CST) e elementos triangulares quadráticos (LST), sendo os resultados apresentados nas Tabelas 7 e 8, respectivamente. Como medida da eficiência dos vários estimadores de erro são utilizados os mesmos parâmetros empregados para o problema unidimensional de barra com refino uniforme.

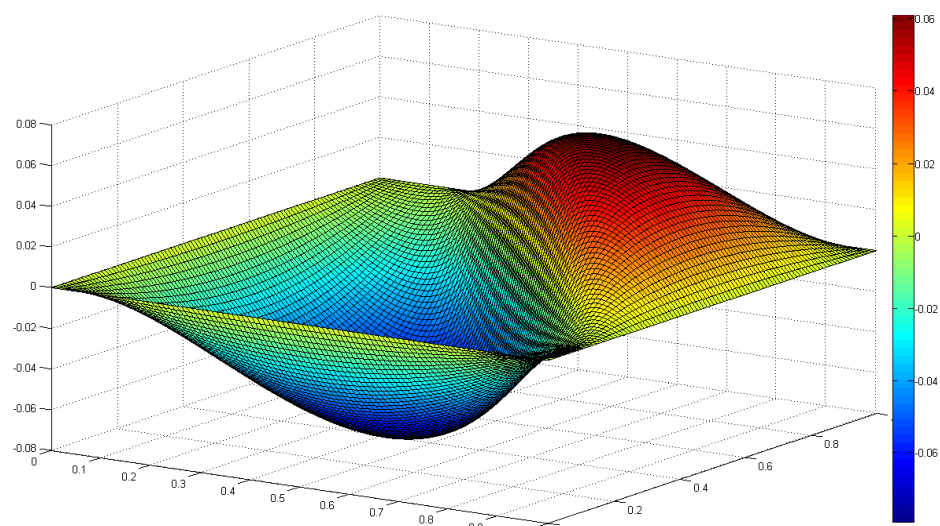


Figura 13 – Problema 2: Solução analítica.

A sequência de malhas empregadas é exposta na Figura 14 e nas Figuras 15 e 16 podem ser observadas as taxas de convergência do erro e do índice de efetividade global em função do número de graus de liberdade na malha para elemento CST e LST, respectivamente.

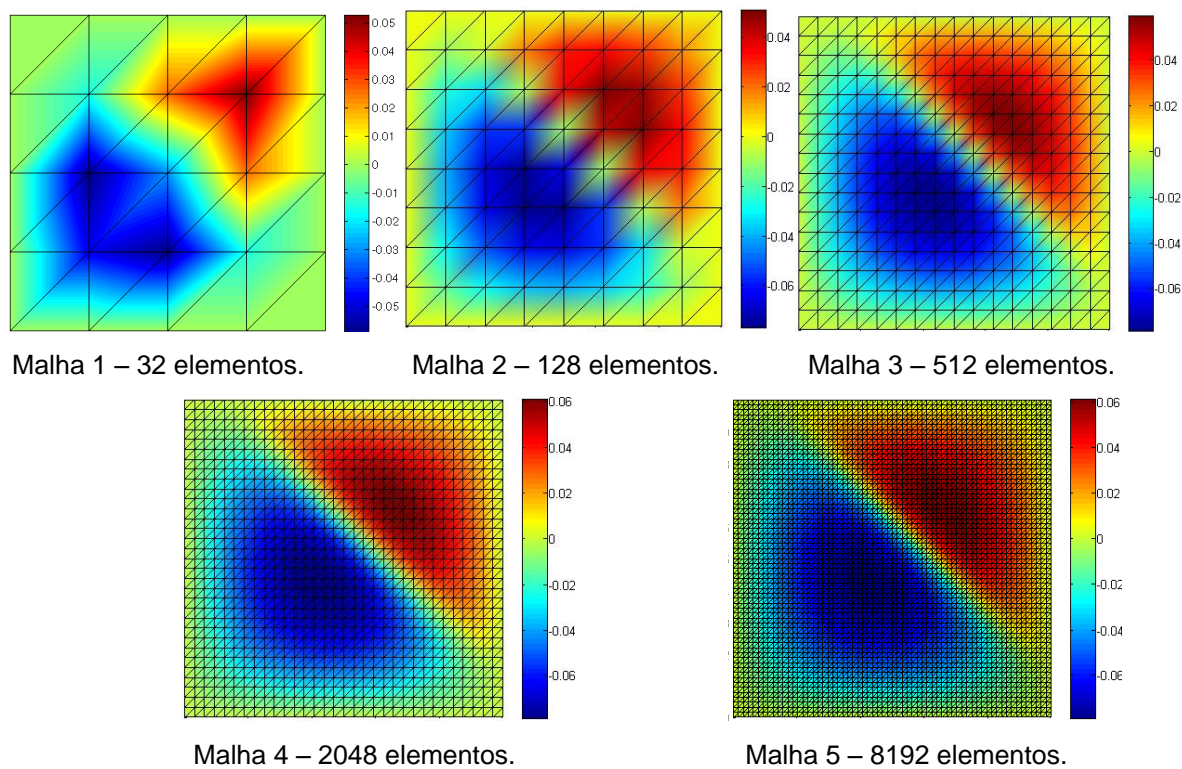


Figura 14 – Problema 2: Resultados obtidos para diferentes malhas empregadas para análise dos diversos estimadores.

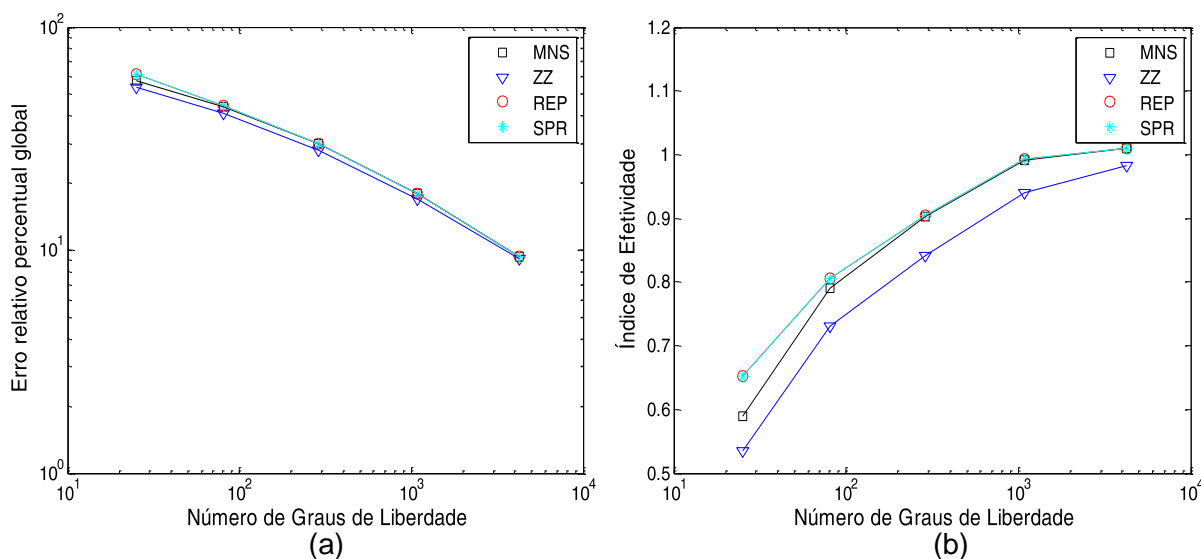


Figura 15 – Problema 2: (a) Erro relativo percentual global para elemento CST. (b) Índice de efetividade global para elemento CST.

Como observado na Tabela 7 e na Figura 15, os quatro estimadores de erro, quando aplicados ao problema plano de condução térmica empregando elemento CST, mostram-se eficientes, pois possuem índice de efetividade global ( $\theta$ ) tendendo a unidade e a medida do desvio do índice de efetividade ( $D_\theta$ ) tendendo a zero à medida que a malha é refinada. Como observado no problema unidimensional de barra utilizando elemento linear, os estimadores de erro SPR e REP são equivalentes também para elemento CST no problema em análise.

Com o intuito de quantificar a diferença entre o custo computacional dos quatro estimadores de erro, foram medidos os tempos de processamento para cada processo de recuperação em uma malha uniforme composta por 800 elementos e empregando o elemento CST. Os tempos relativos, ou seja, os tempos especificados em uma escala, onde um indica o estimador com menor custo computacional são: MNS (1), SPR (39), REP (53) e ZZ (162). Logo, pela simplicidade de implementação e pelo menor custo computacional, destaca-se o estimador MNS, o qual, para o elemento CST, tem características muito próximas aos estimadores REP e SPR. Cabe ressaltar que os valores aqui expressos são dependentes, não somente da natureza de cada processo de recuperação, mas também da técnica de programação do algoritmo.

Tabela 7 - Resultados do Problema 2: Elemento CST e refino uniforme.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
<b>Média Nodal Simples (MNS)</b>	$\eta$	57,39%	43,76%	29,90%	17,88%	9,37%
	$\theta$	0,5886	0,7907	0,9029	0,9922	1,0094
	<i>NGL</i>	25	81	289	1089	4225
	$D_\theta$	0,60	0,54	0,25	0,17	0,15
<b>Zienkiewicz e Zhu (ZZ)</b>	$\eta$	53,72%	40,99%	28,05%	16,97%	9,12%
	$\theta$	0,5349	0,7302	0,8422	0,9402	0,9827
	<i>NGL</i>	25	81	289	1089	4225
	$D_\theta$	0,52	0,33	0,18	0,11	0,07
<b>Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)</b>	$\eta$	61,34%	44,44%	29,96%	17,88%	9,37%
	$\theta$	0,6523	0,8061	0,9049	0,9925	1,0094
	<i>NGL</i>	25	81	289	1089	4225
	$D_\theta$	0,47	0,49	0,22	0,15	0,14
<b>Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)</b>	$\eta$	61,34%	44,44%	29,96%	17,88%	9,37%
	$\theta$	0,6523	0,8061	0,9049	0,9925	1,0094
	<i>NGL</i>	25	81	289	1089	4225
	$D_\theta$	0,47	0,49	0,22	0,15	0,14

Da mesma forma que para elemento CST, os tempos de processamento dos diferentes processos de recuperação foram obtidos empregando o elemento LST e uma malha uniforme composta por 200 elementos. Neste caso, os tempos relativos são: MNS (1), SPR (59), ZZ (156) e REP (168).

Por outro lado, para o elemento LST, é possível observar na Tabela 8 e na Figura 16, que os estimadores MNS e ZZ não se mostram eficientes, subestimando o erro ao longo da malha, ou seja, possuem um índice de efetividade global ( $\theta$ ) inferior à unidade. Porém, como esperado, os estimadores de erro baseados em padrões, REP e SPR, possuem precisão comparáveis e podem ser utilizados como estimadores de erro para esse elemento. Pode-se visualizar na Figura 16 uma característica oscilatória utilizando o estimador SPR e REP, onde repentinamente mesmo com o aumento do número de graus de liberdade da malha 2 para a malha 3 o índice de efetividade afasta-se da unidade e o desvio do índice de efetividade aumenta. Logo após, a convergência para o erro verdadeiro da malha continua da forma esperada. A princípio, não há uma explicação matemática para esse fato. Uma possível causa, é o inadequado posicionamento de algum elemento da malha 3 na região crítica da solução, ocasionando um elevando índice de efetividade

elementar. Deve ser frisado que esse fenômeno não é evidenciado quando de um refino uniforme partindo de uma malha com 50 elementos.

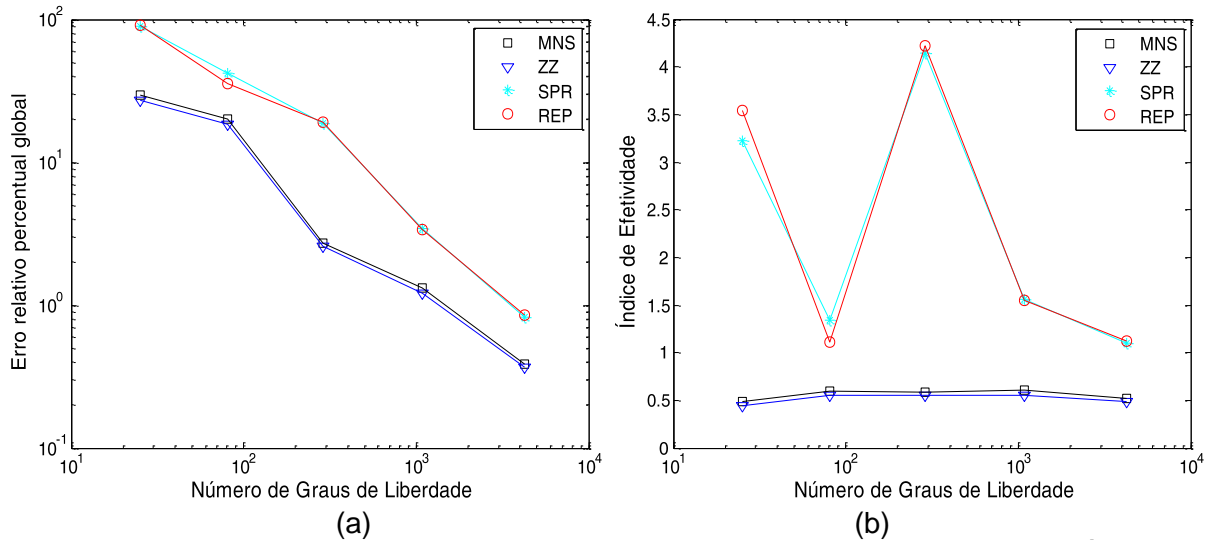


Figura 16 – Problema 2: (a) Erro relativo percentual global para elemento LST. (b) Índice de efetividade global para elemento LST.

Tabela 8 - Resultados do Problema 2: Elemento LST e refino uniforme.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
<b>Média Nodal Simples (MNS)</b>	$\eta$	29,47%	20,01%	2,73%	1,32%	0,39%
	$\theta$	0,4820	0,5981	0,5893	0,6034	0,5226
	$NGL$	25	81	289	1089	4225
	$D_\theta$	0,61	0,85	0,48	0,56	0,69
<b>Zienkiewicz e Zhu (ZZ)</b>	$\eta$	27,16%	18,40%	2,57%	1,22%	0,37%
	$\theta$	0,4410	0,5482	0,5533	0,5538	0,4859
	$NGL$	25	81	289	1089	4225
	$D_\theta$	0,55	0,57	0,49	0,58	0,68
<b>Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)</b>	$\eta$	89,99%	41,78%	18,89%	3,42%	0,83%
	$\theta$	3,2261	1,3465	4,1445	1,5586	1,1022
	$NGL$	25	81	289	1089	4225
	$D_\theta$	6,89	5,03	6,99	1,77	0,75
<b>Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)</b>	$\eta$	91,48%	35,62%	19,24%	3,41%	0,85%
	$\theta$	3,5411	1,1161	4,2245	1,5520	1,1234
	$NGL$	25	81	289	1089	4225
	$D_\theta$	7,24	2,47	6,89	1,56	0,73

#### 4.4.1 Padrões de nós sobre o contorno

Uma das particularidades dos estimadores baseados em padrões, SPR e REP, estudada por Zienkiewicz e Zhu (1992a, 1992b, 1995) consiste em não incluir os padrões formados a partir de nós pertencentes aos contornos para o cálculo do campo de tensões recuperadas, buscando-se assim os coeficientes dos nós de vértices mais próximos. Neste trabalho, a esta abordagem dá-se o nome de clássica. Segundo os autores, caso isso não seja seguido, a superconvergência nos contornos é perdida.

De forma a verificar essa propriedade aplicada ao problema plano de condução térmica empregam-se os elementos CST (Tabela 9 e Figura 17) e LST (Tabela 10 e Figura 18) e o estimador SPR em uma abordagem denominada de abordagem teste.

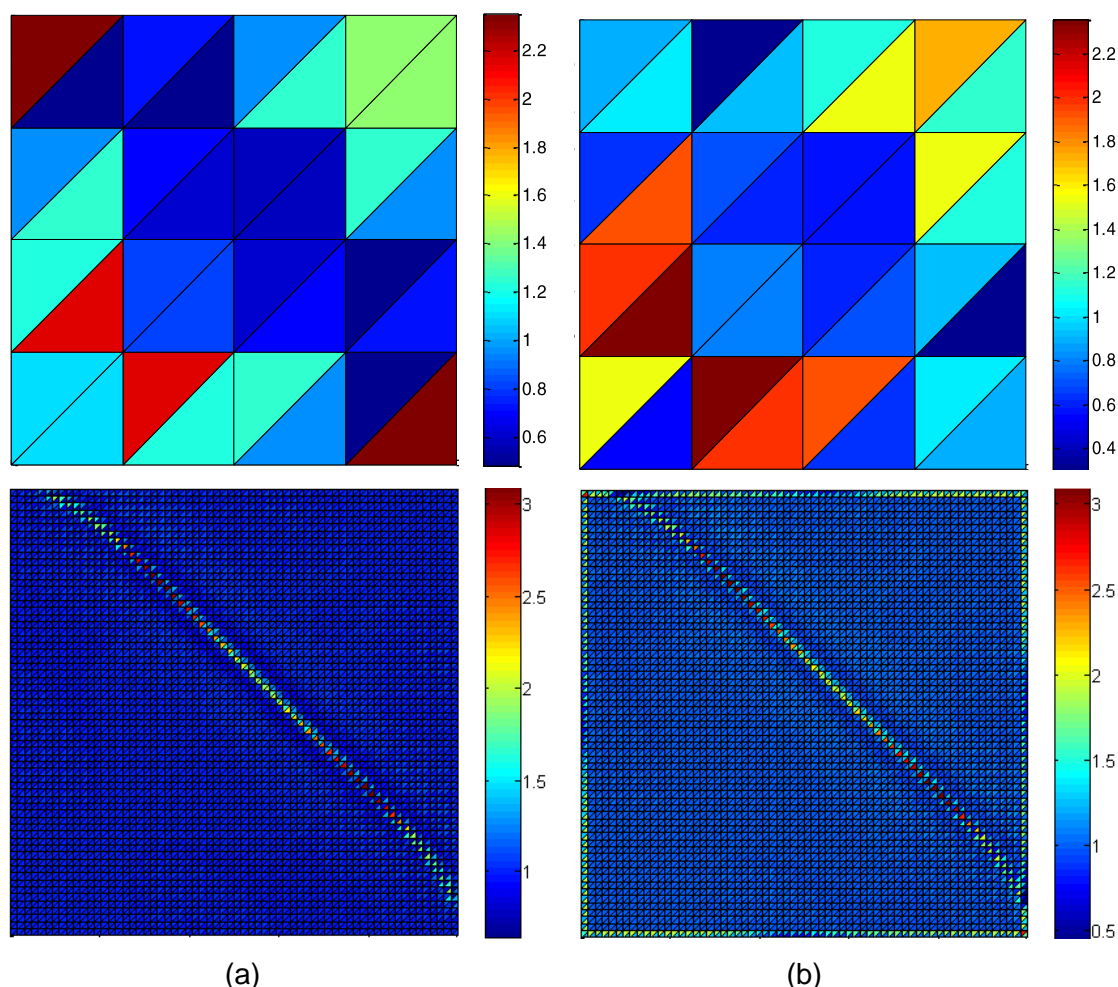


Figura 17 – Problema 2: Índices de efetividades elementares para elemento CST e estimador SPR. (a) Abordagem clássica. (b) Abordagem teste.



Nesta abordagem inclui-se a recuperação dos nós dos contornos em que os pontos superconvergentes são suficientes para a formação do padrão (três pontos para elemento CST e seis pontos para elemento LST).

Tabela 9 - Resultados do Problema 2: Comparação entre abordagem clássica e abordagem teste para elemento CST, estimador SPR e refino uniforme.

Abordagem		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
<b>Teste</b>	$\eta$	64,87%	46,26%	30,50%	18,02%	9,40%
	$\theta$	0,7160	0,8477	0,9228	1,0003	1,0133
	<i>NGL</i>	25	81	289	1089	4225
	$D_\theta$	0,66	0,67	0,37	0,25	0,19
<b>Clássica</b>	$\eta$	61,34%	44,44%	29,96%	17,88%	9,37%
	$\theta$	0,6523	0,8061	0,9049	0,9925	1,0094
	<i>NGL</i>	25	81	289	1089	4225
	$D_\theta$	0,47	0,49	0,22	0,15	0,14

Nota-se, pela Tabela 9, que, para o elemento CST, o índice de efetividade global ( $\theta$ ) e o desvio do índice de efetividade ( $D_\theta$ ) apresentam resultados inferiores quando os nós dos contornos são utilizados (abordagem teste), o que é comprovado através da Figura 17, onde é possível visualizar os índices de efetividades elementares para o estimador SPR para ambas as abordagens.

Tabela 10 - Resultados do Problema 2: Comparação entre abordagem clássica e abordagem teste para elemento LST, estimador SPR e refino uniforme.

Abordagem		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
<b>Teste</b>	$\eta$	42,02%	33,66%	10,18%	2,82%	0,81%
	$\theta$	0,7237	1,0466	2,2041	1,2844	1,0728
	<i>NGL</i>	25	81	289	1089	4225
	$D_\theta$	0,42	1,87	1,94	0,73	0,56
<b>Clássica</b>	$\eta$	89,99%	41,78%	18,89%	3,42%	0,83%
	$\theta$	3,2261	1,3465	4,1445	1,5586	1,1022
	<i>NGL</i>	25	81	289	1089	4225
	$D_\theta$	6,89	5,03	6,99	1,77	0,75

Por outro lado, observando a Tabela 10, para o elemento LST, o índice de efetividade global e o desvio do índice de efetividade apresentam resultados melhores quando a abordagem teste é empregada, o que é comprovado através da

Figura 18, onde podem ser observados os índices de efetividades elementares para as duas abordagens.

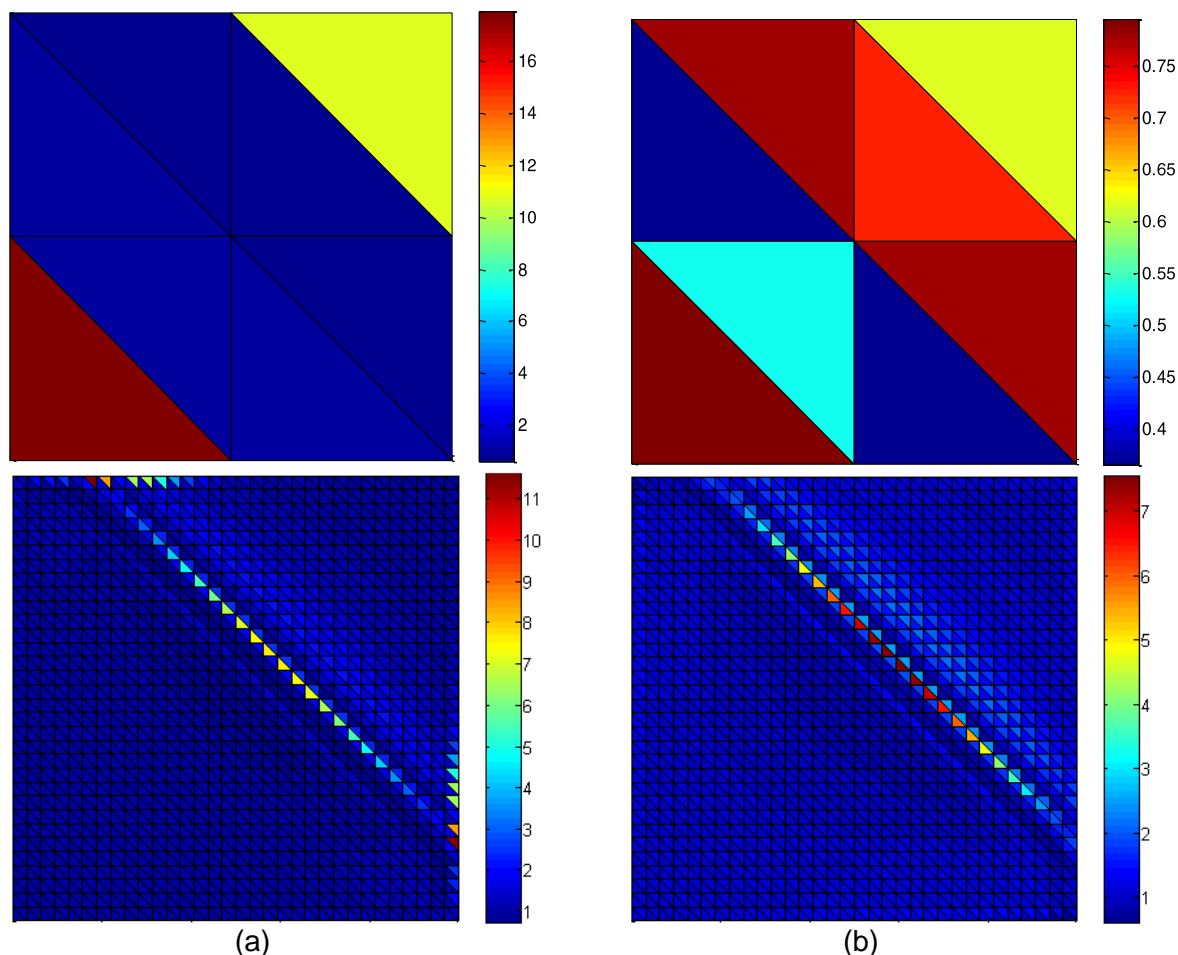


Figura 18 – Problema 2: Índices de efetividades elementares para elemento LST e estimador SPR. (a) Abordagem Clássica. (b) Abordagem teste.

#### 4.5 PROBLEMA PLANO DE CONDUÇÃO TÉRMICA – REFINO $H$ -ADAPTATIVO

Nesta seção são comparadas as características e eficiência dos diversos estimadores de erro como guias do processo  $h$ -adaptativo aplicado ao problema plano de condução térmica utilizando os elementos CST e LST. Dois critérios de malha ótima distintos são utilizados, equidistribuição do erro e equidistribuição do erro específico (densidade de erro), cujas formulações são expostas no Capítulo 3. O problema de valor de contorno é o mesmo apresentado na seção anterior.

#### 4.5.1 Análise dos estimadores de erro como guia de um processo $h$ -adaptativo

Como medida da eficiência dos vários estimadores de erro como guias do processo adaptativo, são utilizados, além dos parâmetros para refino uniforme, o máximo valor do parâmetro de refinamento elementar ( $\xi_{ie,máx}$ ), a média simples dos valores do parâmetro de erro local elementar ( $\bar{\xi}_{ie,med}$ ) e o desvio do parâmetro de erro local elementar ( $D_{\bar{\xi}_{ie}}$ ).

Uma correção empírica para o estimador de erro baseado na norma em energia (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987) propõe a multiplicação do parâmetro de refinamento em cada elemento ( $\xi_{ie}$ ) por um fator, o qual varia de acordo com o elemento empregado (elemento CST: 1,3; elemento LST: 1,4). Porém, note que esse fator não faz distinção nenhuma entre elementos que necessitam diminuir ou aumentar seu tamanho. Logo, no corrente trabalho, utilizar-se-á um parâmetro de refinamento corrigido variando de acordo com o parâmetro de refinamento verdadeiro. Com o objetivo de controlar o crescimento desordenado dos elementos, o qual pode gerar uma baixa qualidade da malha obtida, é introduzido um fator de amortecimento sempre que  $\xi_{ie} < 1$ , ou seja, quando ocorre desrefino (FANCELLO; FEIJÓO, 1992). Além disso, em problemas planos, devido à natureza do processo adaptativo, unido com as características próprias do gerador de malha empregado, também surge a necessidade da utilização de um fator de correção quando  $\xi_{ie} > 1$ , ou seja, quando ocorre refino. Dessa forma, o parâmetro de refinamento efetivamente utilizado para o cálculo do novo tamanho elementar, o qual pode ser visto na Figura 19, é dado por:

$$\begin{aligned} \xi_{ie} &\rightarrow \xi_{ie} + \frac{(1 - \xi_{ie})}{2}, & \text{para } \xi_{ie} < 1. \\ \xi_{ie} &\rightarrow \xi_{ie} + \frac{(\xi_{ie} - 1)}{4}, & \text{para } \xi_{ie} > 1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

O processo de refino adaptativo é iniciado com a seguinte configuração: elemento CST, uma malha uniforme composta por 32 elementos, erro relativo percentual admissível de 10% e critério de malha ótima de equidistribuição do erro.

A Tabela 11 apresenta os parâmetros que caracterizam o processo adaptativo. As soluções obtidas para elemento linear empregando os diferentes estimadores podem ser visualizadas na Figura 20.

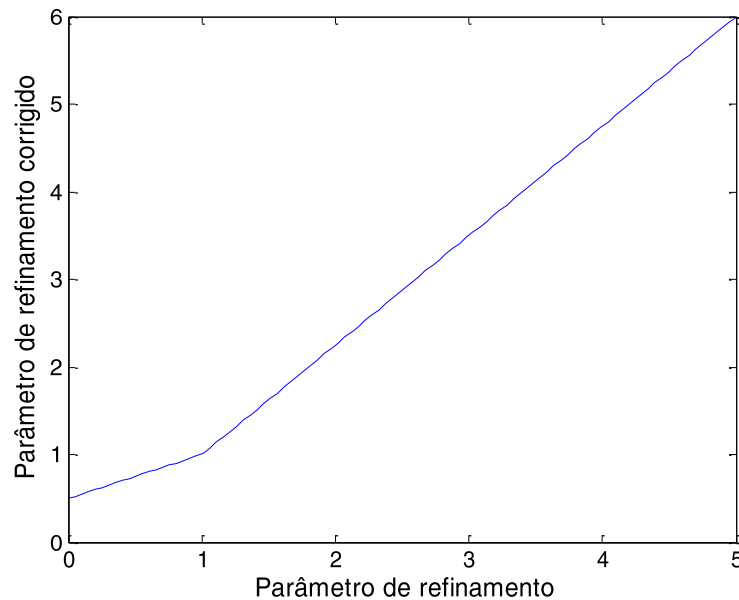


Figura 19 – Parâmetro de refinamento corrigido em função do parâmetro de refinamento verdadeiro.

Pela Tabela 11, observa-se que, para o problema em análise e utilizando o elemento CST, assim como ocorreu para refino  $h$ -uniforme, todos os estimadores de erro apresentam um índice de efetividade tendendo a um e um desvio do índice de efetividade tendendo a zero quando o erro na malha tende a um valor baixo. Também é possível perceber que o erro relativo percentual global ( $\eta$ ) na última malha, para todos os estimadores, é próximo e abaixo do erro relativo percentual admissível requerido, sendo que em apenas duas iterações o critério global já é satisfeito ( $\eta \leq \bar{\eta} = 10\%$ ). Ademais, outra característica apresentada por estes estimadores, quando utilizados como guias de um processo adaptativo, é que conduzem a uma malha que claramente acompanha as regiões de maiores gradientes, como pode ser observado na Figura 20.

Por outro lado,  $\zeta_{ie,m\acute{a}x}$  chega a valores próximos aos de convergência (um), mas não consegue alcançá-los. Esse fato pode ocorrer, por exemplo, devido a influência do gerador de malha empregado e não é objeto de estudo do presente trabalho. Percebe-se pela Tabela 11 e pela Figura 20 uma ligeira oscilação dos parâmetros de erro locais a partir da malha 3 para todos os estimadores, onde, em

geral, os elementos são aumentados além do que necessitam em determinadas regiões e então refinados além do que necessitam em outras. Dessa maneira, é evidente certa dificuldade em termos de convergência local. Essa questão não é tratada pela maioria dos autores.

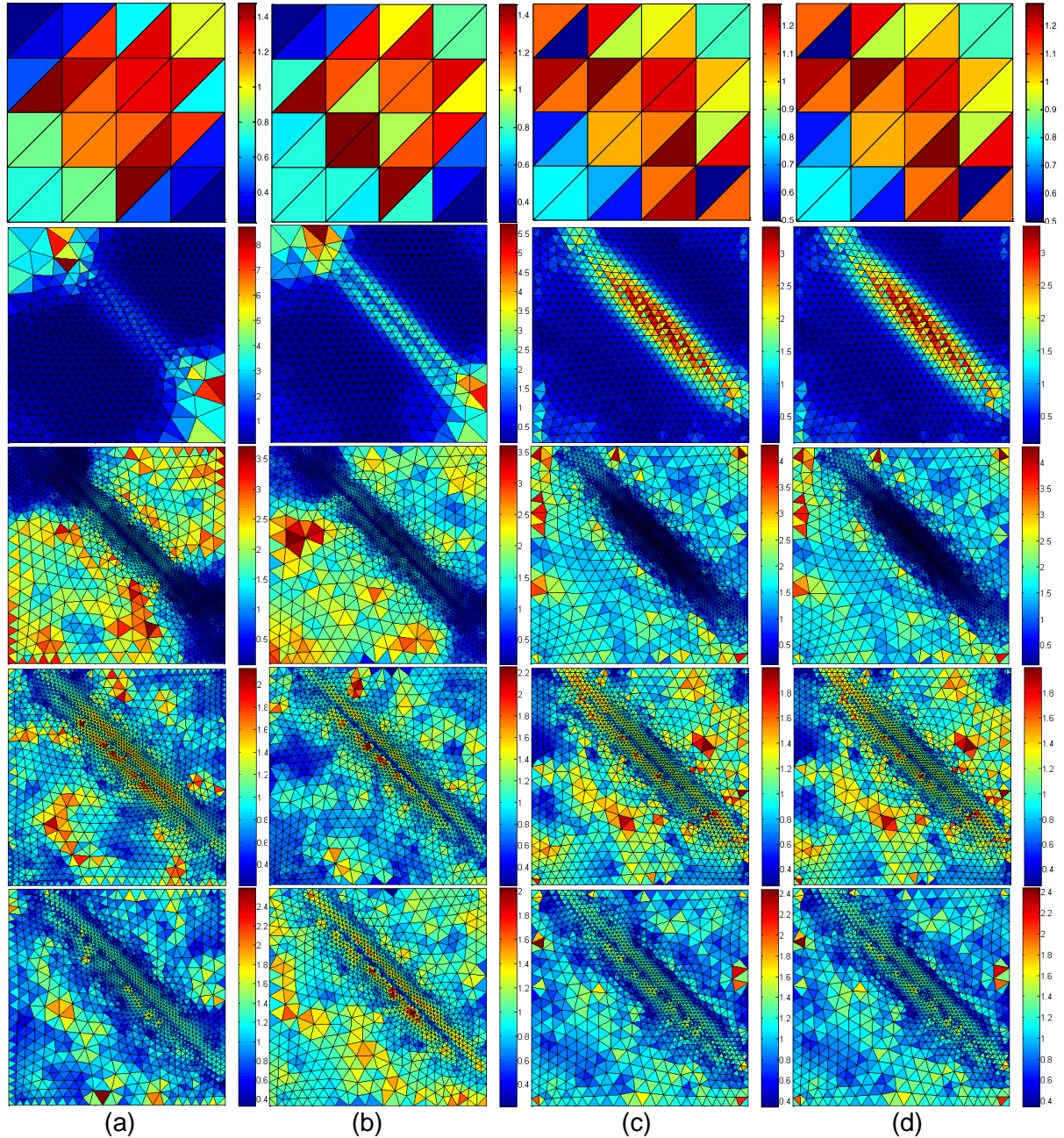


Figura 20 – Problema 2: Parâmetros de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) para elemento CST utilizando o critério de malha ótima de equidistribuição. (a) Estimador MNS. (b) Estimador ZZ. (c) Estimador SPR. (d) Estimador REP.

Como característica do critério de malha ótima adotado tem-se um desvio do parâmetro de erro local ( $D_{\bar{\zeta}_{ie}}$ ) reduzindo continuamente a zero e a média dos

parâmetros de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie,med}$ ) tendendo a unidade, características essas desejáveis, pois indicam que a malha aproxima-se da malha ótima.

Tabela 11 - Resultados do Problema 2: Elemento CST, refino  $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
Média Nodal Simples (MNS)	$\eta$	57,39%	17,39%	6,58%	6,52%	7,44%
	$\theta$	0,5886	1,0411	1,0331	1,0264	1,0306
	$NGL$	25	640	2210	1743	1316
	$\zeta_{ie,máx}$	8,50	15,10	2,43	1,40	1,92
	$D_{\theta}$	0,60	0,33	0,31	0,34	0,34
	$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	0,41	0,93	0,60	0,30	0,25
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,92	0,57	0,82	0,96	0,97
Zienkiewicz e Zhu (ZZ)	$\eta$	53,72%	14,72%	6,98%	6,96%	7,73%
	$\theta$	0,5349	0,9916	0,9875	0,9898	0,9896
	$NGL$	25	599	1636	1393	1116
	$\zeta_{ie,máx}$	7,84	8,42	2,51	1,57	1,56
	$D_{\theta}$	0,52	0,13	0,11	0,11	0,12
	$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	0,36	0,82	0,49	0,27	0,24
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,94	0,66	0,88	0,96	0,97
Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)	$\eta$	61,34%	12,68%	6,90%	6,87%	7,80%
	$\theta$	0,6523	1,0721	1,0298	1,0268	1,0343
	$NGL$	25	844	1826	1508	1199
	$\zeta_{ie,máx}$	7,85	4,31	2,95	1,37	1,90
	$D_{\theta}$	0,47	0,30	0,35	0,35	0,35
	$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	0,22	0,76	0,52	0,26	0,24
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,97	0,71	0,87	0,97	0,97
Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)	$\eta$	61,34%	12,68%	6,90%	6,87%	7,80%
	$\theta$	0,6523	1,0721	1,0298	1,0268	1,0343
	$NGL$	25	844	1826	1508	1199
	$\zeta_{ie,máx}$	7,85	4,31	2,95	1,37	1,90
	$D_{\theta}$	0,47	0,30	0,35	0,35	0,35
	$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	0,22	0,76	0,52	0,26	0,24
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,97	0,71	0,87	0,97	0,97

Um trabalho similar ao corrente foi apresentado por Castellazzi *et al.* (2010), onde o autor realiza adaptatividade isotrópica utilizando o software GID para a geração da malha e empregando um estimador de erro *a posteriori* baseado em recuperação por compatibilidade em padrões (RCP). Os resultados apresentados

por Castellazzi *et al.* (2010) na malha 3 apresentam um índice de efetividade de 1,027, erro relativo percentual global de 9,20% e 1881 elementos. Ou seja, estes resultados são muito próximos aos apresentados pelos estimadores aqui discutidos, exceto pelo critério de convergência, para o qual os autores consideram somente o critério global.

Com o objetivo de avaliar a qualidade dos estimadores de erro baseados em padrões, SPR e REP, quando guias de um processo  $h$ -adaptativo empregando o elemento LST, os seguintes parâmetros iniciais são utilizados: malha uniforme composta por 32 elementos, erro relativo percentual admissível de 3% e critério de malha ótima de equidistribuição do erro. Os parâmetros de qualidade do processo adaptativo e dos estimadores de erro podem ser observados na Tabela 12, sendo os parâmetros de erros locais visualizados na Figura 21.

Esse processo não é realizado para os estimadores MNS e ZZ, uma vez que, como exposto na Seção 4.4, os mesmos apresentam índices de efetividade globais ( $\theta$ ) inferiores a unidade para o corrente problema empregando elemento LST e não convergem para o erro verdadeiro quando o número de graus de liberdade do sistema é aumentado. Através da Tabela 12, pode-se notar que para o presente problema empregando elemento LST, quando o mesmo é submetido ao processo  $h$ -adaptativo, são obtidos valores aceitáveis de índices de efetividade ( $\theta$ ).

Tabela 12 - Resultados do Problema 2: Elemento LST, refino  $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
<b>Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)</b>	$\eta$	33,66%	6,92%	2,21%	2,04%	2,14%
	$\theta$	1,0466	1,2881	1,2034	1,1966	1,2121
	$NGL$	81	621	1112	1107	1093
	$\zeta_{ie,máx}$	32,30	8,94	2,53	1,70	1,98
	$D_\theta$	1,87	0,51	0,61	0,44	0,49
	$D_{\zeta_{ie}}$	0,72	0,86	0,57	0,51	0,52
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,74	0,63	0,84	0,87	0,86
<b>Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)</b>	$\eta$	38,83%	6,07%	1,97%	2,20%	2,00%
	$\theta$	1,2337	1,2892	1,1764	1,1563	1,1572
	$NGL$	81	713	1181	1163	1175
	$\zeta_{ie,máx}$	31,31	8,16	2,60	2,34	1,78
	$D_\theta$	4,19	0,61	0,65	0,65	0,65
	$D_{\zeta_{ie}}$	0,69	0,87	0,55	0,58	0,54
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,76	0,62	0,85	0,83	0,85



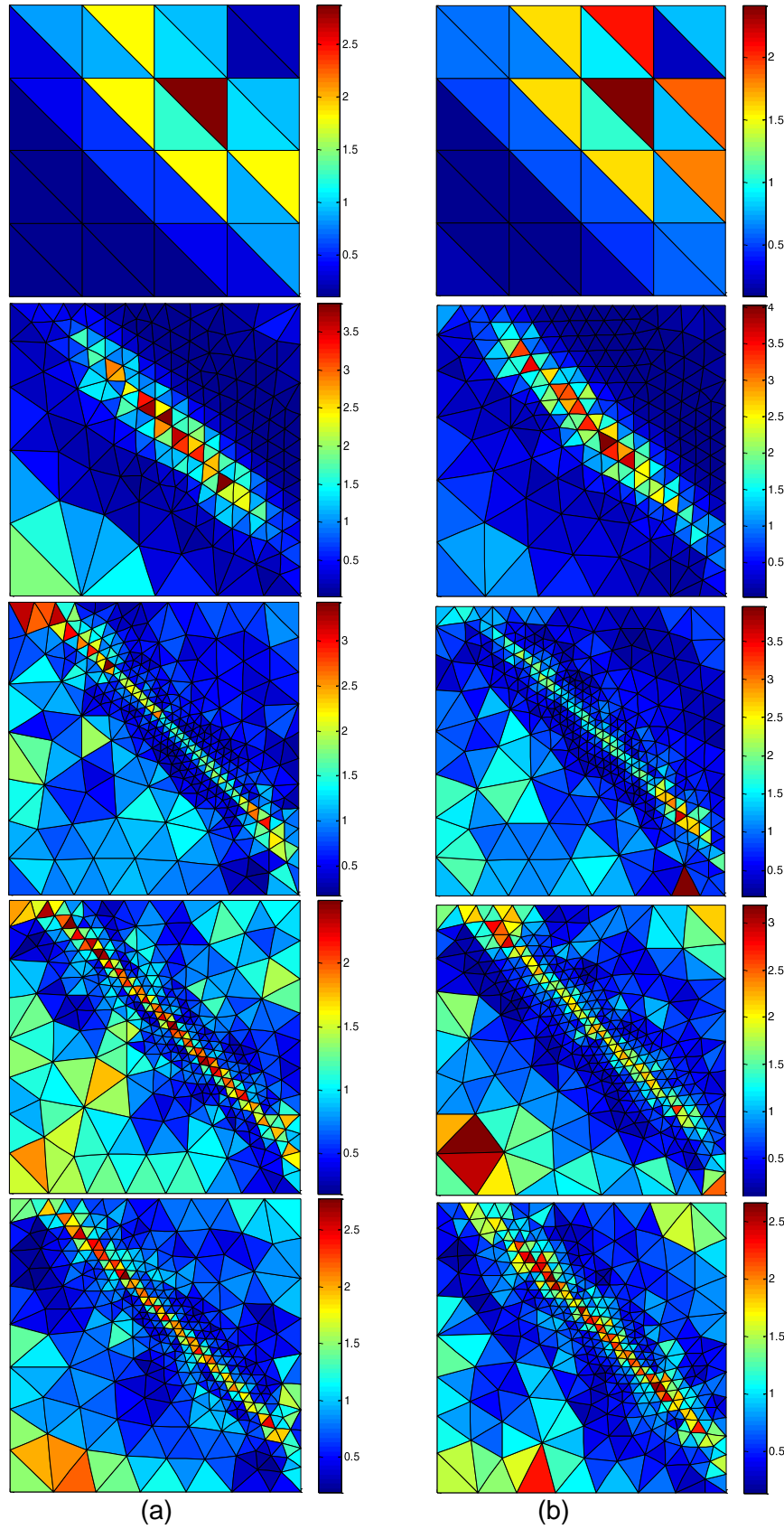


Figura 21 – Problema 2: Parâmetros de erro local ( $\bar{\zeta}_{le}$ ) para elemento LST utilizando o critério de malha ótima de equidistribuição. (a) Estimador SPR. (b) Estimador REP.



Em geral, o estimador SPR possui menores desvios de índice de efetividade ( $D_\theta$ ) quando comparado com o estimador REP. Além disso, para todas as iterações os índices estão acima da unidade, ou seja, eles superestimam o erro e, desse modo, o processo se mostra conservativo. Também pode ser constatado que, a partir da malha 3, os desvios do parâmetro de erro local ( $D_{\zeta_{ie}}$ ) e a média do parâmetro de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie,med}$ ) são minimamente alterados indicando que a malha pouco se modifica durante as três últimas iterações.

#### 4.5.2 Influência do critério de malha ótima

De modo a confrontar as diferenças entre os critérios de malha ótima de equidistribuição do erro e de equidistribuição do erro específico para elemento CST, este segundo critério é aplicado partindo-se de uma malha com 32 elementos, 10% de erro percentual global admissível e utilizando o estimador ZZ. Os resultados comparativos são expostos na Tabela 13 e podem ser visualizados na Figura 22.

Tabela 13 – Problema 2: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador ZZ, elemento CST e refino  $h$ -adaptativo.

Critério de malha ótima		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
Equidistribuição do erro específico	$\eta$	57,72%	14,72%	7,43%	7,43%	7,58%
	$\theta$	0,5349	0,9916	0,9747	0,9716	0,9606
	$NGL$	25	599	1599	1971	2054
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	7,84	4,93	1,80	1,47	1,44
	$D_\theta$	0,52	0,13	0,10	0,10	0,11
	$D_{\zeta_{ie}}$	0,36	0,80	0,42	0,28	0,23
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,94	0,68	1,24	1,15	1,10
Equidistribuição do erro	$\eta$	53,72%	14,72%	6,98%	6,96%	7,73%
	$\theta$	0,5349	0,9916	0,9875	0,9898	0,9896
	$NGL$	25	599	1636	1393	1116
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	7,84	8,42	2,51	1,57	1,56
	$D_\theta$	0,52	0,13	0,11	0,11	0,12
	$D_{\zeta_{ie}}$	0,36	0,82	0,49	0,27	0,24
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,94	0,66	0,88	0,96	0,97

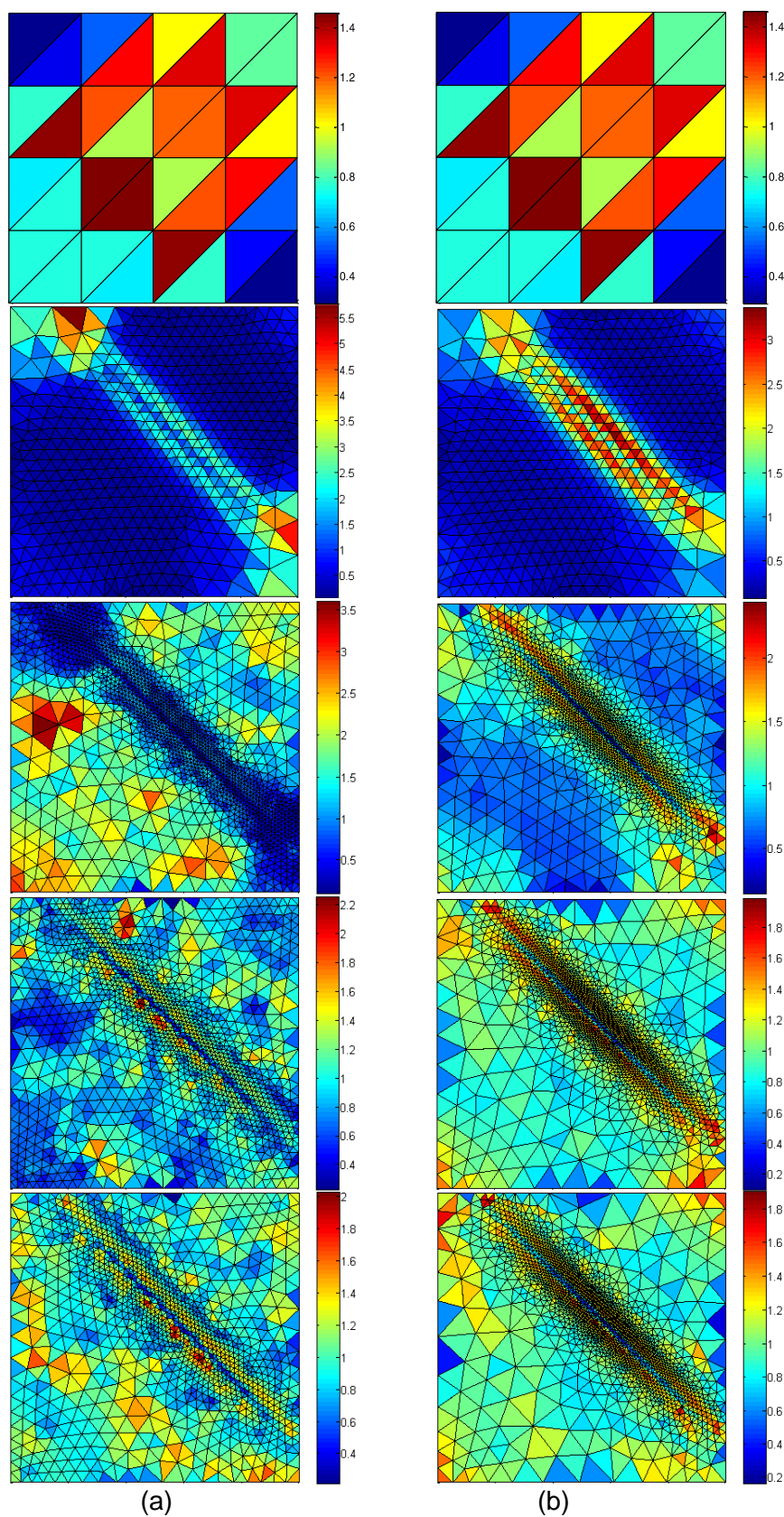


Figura 22 – Problema 2: Parâmetros de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) para elemento CST e estimador ZZ.  
 (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico.

Claramente o processo  $h$ -adaptativo conduz em ambos os casos a um desvio do parâmetro de erro local ( $D_{\zeta_{ie}}$ ) tendendo a zero e a média do parâmetro de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie,med}$ ) tendendo a unidade. Ou seja, o procedimento de refino conduz a uma malha próxima à malha ótima. Assim, é possível observar através da Tabela 13 e da Figura 22 que o critério de malha ótima de equidistribuição de erro específico, em comparação com o critério de equidistribuição do erro, conduz a uma malha mais densa nas regiões de maiores gradientes. Essa característica, apesar de apresentar um custo computacional mais elevado, pode ser interessante em algumas aplicações de engenharia, pois, em geral, as regiões de maiores gradientes são as regiões mais críticas da estrutura.

Além disso, para o problema em análise, utilizando o critério de malha ótima de equidistribuição do erro específico elementar a malha converge lentamente para a malha esperada somente aumentando-se o número de graus de liberdade, diferentemente do critério de equidistribuição do erro, em que ocorre aumento do número de graus de liberdade ( $NGL$ ) da malha 2 para a malha 3, e, após isso, ocorre uma diminuição do  $NGL$  da malha 3 para malha 4 e da malha 4 para a malha 5 (Tabela 13).

Por fim, para comparar as diferenças entre os critérios de malha ótima de equidistribuição do erro e equidistribuição do erro específico para o elemento LST e verificar a eficiência do estimador SPR como guia de um processo  $h$ -adaptativo bidimensional, o mesmo é aplicado tendo como ponto de partida uma malha com 32 elementos e 3% de erro percentual global admissível. Os resultados são expostos na Tabela 14 e podem ser visualizados na Figura 23.

Nesse caso, os demais estimadores não são aplicados já que MNS e ZZ não se mostram eficientes para a estimativa do erro para o elemento LST aplicado ao problema em análise. Além disso, o estimador REP é comparavelmente equivalente ao SPR. Como verificado para o elemento CST, o elemento LST também apresenta um maior número de elementos concentrados nas regiões de maior gradiente. Além disso, tem-se um índice de efetividade próximo e acima da unidade, característica essa que garante uma superestimativa do erro. Através da Figura 23 é possível visualizar que, independente do critério de malha ótima adotado, o estimador SPR pode conduzir com sucesso um processo  $h$ -adaptativo para elemento LST aplicado ao problema plano de condução térmica.

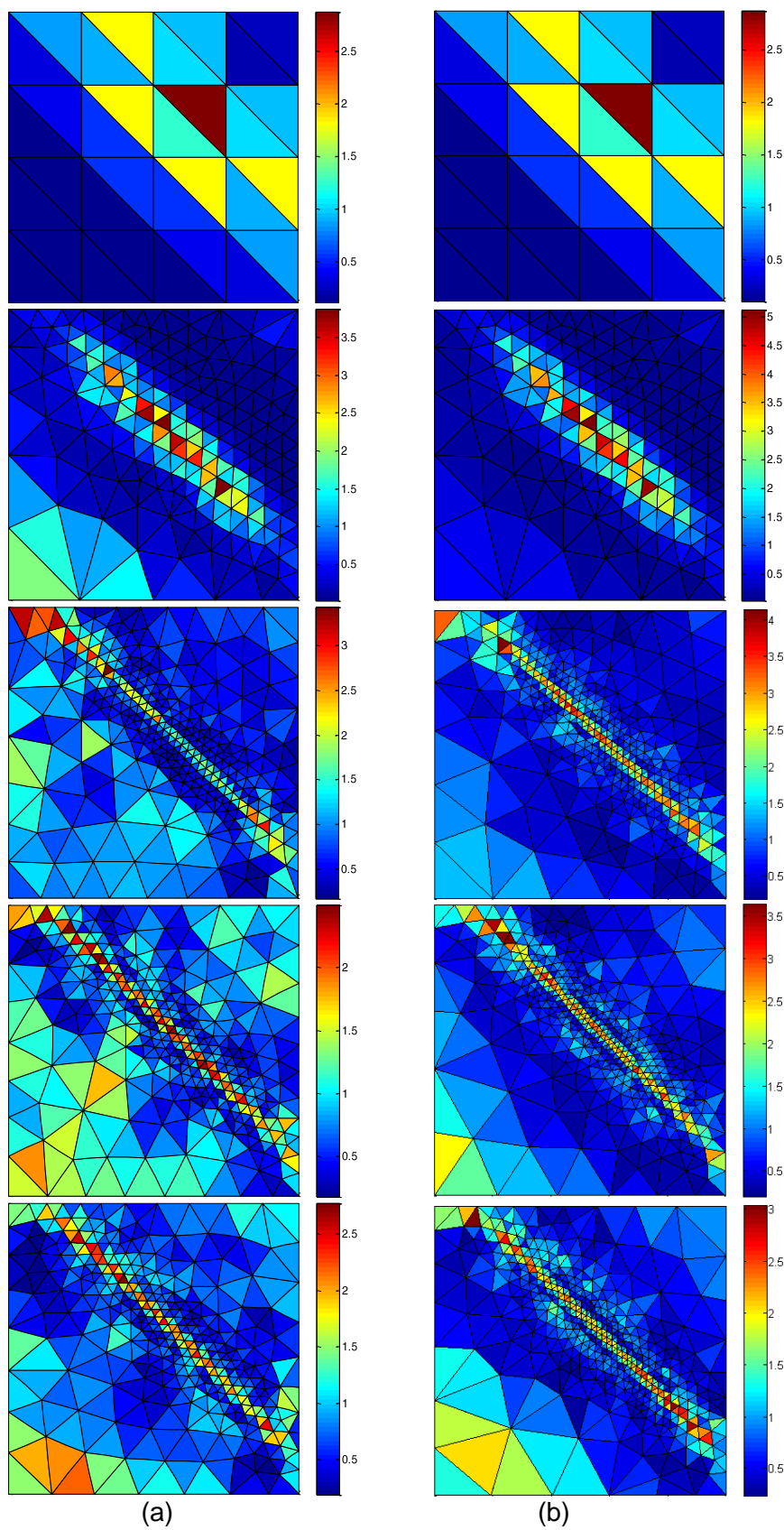


Figura 23 – Problema 2: Parâmetros de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) para elemento LST e estimador SPR. (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico.

Tabela 14 – Problema 2: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador SPR, elemento LST e refino  $h$ -adaptativo.

Critério de malha ótima		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
Equidistribuição do erro específico	$\eta$	33,66%	6,92%	2,02%	1,83%	1,95%
	$\theta$	1,0466	1,2881	1,2033	1,1365	1,1616
	$NGL$	81	621	1331	1520	1584
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	32,30	11,82	2,78	2,21	1,97
	$D_{\theta}$	1,87	0,51	0,49	0,41	0,48
	$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	0,72	1,05	0,76	0,67	0,56
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,74	0,77	1,09	1,03	0,93
Equidistribuição do erro	$\eta$	33,66%	6,92%	2,21%	2,04%	2,14%
	$\theta$	1,0466	1,2881	1,2034	1,1966	1,2121
	$NGL$	81	621	1112	1107	1093
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	32,30	8,94	2,53	1,70	1,98
	$D_{\theta}$	1,87	0,51	0,61	0,44	0,49
	$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	0,72	0,86	0,57	0,51	0,52
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,74	0,63	0,84	0,87	0,86

#### 4.6 PROBLEMA DE ELASTICIDADE PLANA – REFINO UNIFORME

Neste problema, considera-se que as equações de equilíbrio são limitadas e decorrem da elasticidade linear, onde um sólido de domínio  $\Omega$  é sujeito a forças de corpo  $\mathbf{b}$ . Denota-se ainda o contorno do domínio  $\Omega$  por  $\Gamma_u$ . Se  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  e  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$  são, respectivamente, os campos de deslocamentos, deformações e tensões e  $\mathbf{D}$  é o tensor constitutivo material (nesse caso, um material isotrópico, elástico e linear), obtém-se o seguinte problema de valor de contorno (KHENNANE, 2013):

- Relação constitutiva do material:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (4.14)$$

- Equações cinemáticas (considerando pequenos deslocamentos,  $\mathbf{u}$ , e pequenas deformações,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (4.15)$$

onde  $\nabla$  é o operador gradiente e pode ser expresso pela Eq. (4.8).

- Equação diferencial de equilíbrio:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2 \quad (4.16)$$

- Condições de contorno de Dirichlet homogêneas:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (4.17)$$

No corrente caso, o problema de valor de contorno posto acima (equação diferencial de equilíbrio e condições de contorno) pode ser escrito através de sua forma variacional equivalente:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } \mathbf{u}(x, y) \in H_0^1(\Omega) \text{ que satisfaz} \\ &\int_{\Omega} (\nabla^S \mathbf{v})^T \mathbf{D} \nabla^S \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Definindo:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\nabla^S \mathbf{v})^T \mathbf{D} \nabla^S \mathbf{u} \, d\Omega \quad \text{e} \\ I(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} \, d\Omega, \end{aligned} \quad (4.19)$$

a Eq. (4.18) resume-se ao problema de valor de contorno variacional:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } \mathbf{u}(x, y) \in H_0^1(\Omega) \text{ que satisfaz} \\ &B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = I(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde  $B(\cdot, \cdot)$  é a forma bilinear contínua associada ao problema e definida em  $H_0^1 \times H_0^1$ ,  $\mathbf{v}$  é uma função vetorial de variação cinematicamente admissível e  $l(\cdot)$  é um funcional contínuo e linear.

Neste caso, as forças de corpo aplicadas são selecionadas tais que a solução analítica para o campo de deslocamentos seja dada por

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = x(1-x)y(1-y) \arctan[\alpha(\rho - \rho_0)] \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (4.21)$$

sendo  $\rho = (x + y) / \sqrt{2}$ ,  $\rho_0 = 0,8$  e  $\alpha = 20$ . Considera-se ainda um problema de elasticidade plana sujeito a um estado de tensões planas, sendo o módulo de elasticidade longitudinal  $E = 200 \text{ GPa}$ , o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e a espessura da chapa  $th = 1 \text{ mm}$ .

Do mesmo modo que os demais problemas já apresentados, inicialmente são efetuados consecutivos refinamentos uniformes para comparar o desempenho dos vários estimadores de erro. As Tabelas 15 e 16 exibem os resultados para os elementos CST e LST, respectivamente. Como indicador da capacidade dos estimadores de erro, são adotados os mesmos critérios utilizados para o problema unidimensional de barra com refino uniforme e problema linear de condução térmica com refino uniforme.

As taxas de convergência do erro e do índice de efetividade global em função do número de graus de liberdade na malha para os elementos CST e LST podem ser visualizadas nas Figuras 24 e 25, nessa ordem. Características muito semelhantes às encontradas para o problema plano de condução térmica são verificadas também para o problema de elasticidade plana.

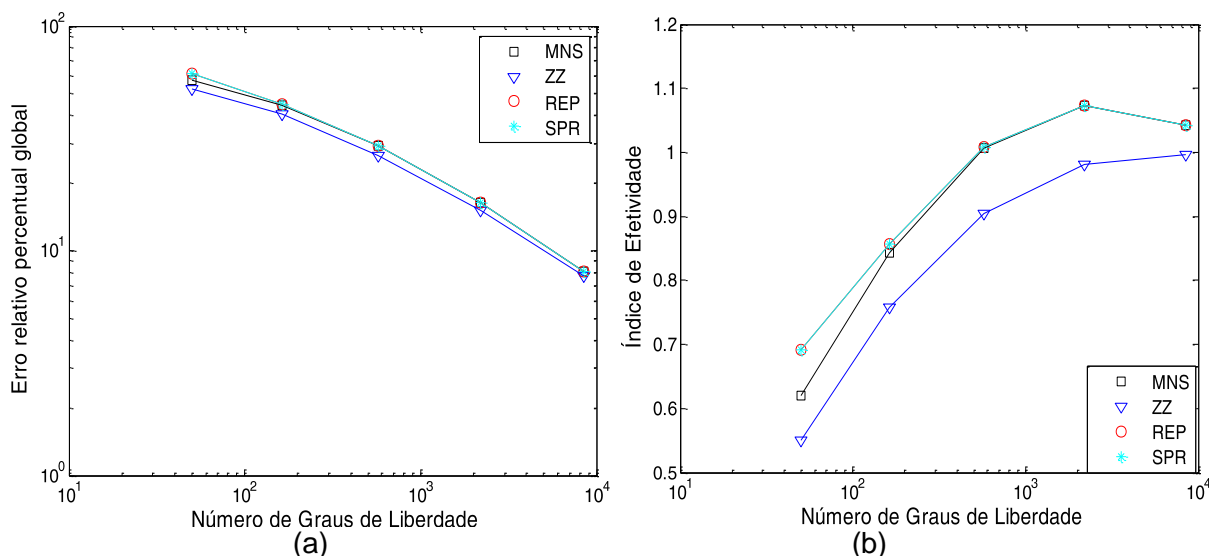


Figura 24 – Problema 3: (a) Erro relativo percentual global para elemento CST. (b) Índice de efetividade global para elemento CST.

Tabela 15 – Resultados do Problema 3 para o elemento CST e refinamento uniforme.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
<b>Média Nodal Simples (MNS)</b>	$\eta$	57,25%	44,29%	29,38%	16,45%	8,12%
	$\theta$	0,6196	0,8432	1,0065	1,0727	1,0421
	$NGL$	50	162	578	2178	8450
	$D_\theta$	0,88	0,75	0,37	0,34	0,26
<b>Zienkiewicz e Zhu (ZZ)</b>	$\eta$	52,73%	40,56%	26,64%	15,09%	7,77%
	$\theta$	0,5507	0,7574	0,9052	0,9819	0,9968
	$NGL$	50	162	578	2178	8450
	$D_\theta$	0,67	0,52	0,20	0,14	0,09
<b>Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)</b>	$\eta$	61,45%	44,83%	29,41%	16,45%	8,12%
	$\theta$	0,6912	0,8561	1,0076	1,0726	1,0420
	$NGL$	50	162	578	2178	8450
	$D_\theta$	0,74	0,71	0,35	0,33	0,26
<b>Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)</b>	$\eta$	61,45%	44,83%	29,41%	16,45%	8,12%
	$\theta$	0,6912	0,8561	1,0076	1,0726	1,0420
	$NGL$	50	162	578	2178	8450
	$D_\theta$	0,74	0,71	0,35	0,33	0,26

Para o corrente problema, ao se utilizar o elemento CST, todos os estimadores de erro apresentam resultados satisfatórios. Isso significa que os mesmos possuem como característica um índice de efetividade global ( $\theta$ ) aproximando-se de um e desvio do índice de efetividade ( $D_\theta$ ) tendendo a zero à medida que o número de graus de liberdade na malha é aumentado (Tabela 15 e



Figura 24). Além disso, como constatado para os demais problemas utilizando refino uniforme, os estimadores de erro SPR e REP são equivalentes para elemento CST no problema corrente (BOROOMAND; ZIENKIEWICZ, 1997a). Destaca-se também a maior precisão atingida pelo estimador ZZ para este tipo de elemento, o qual apresenta um desvio do índice de efetividade inferior aos demais estimadores.

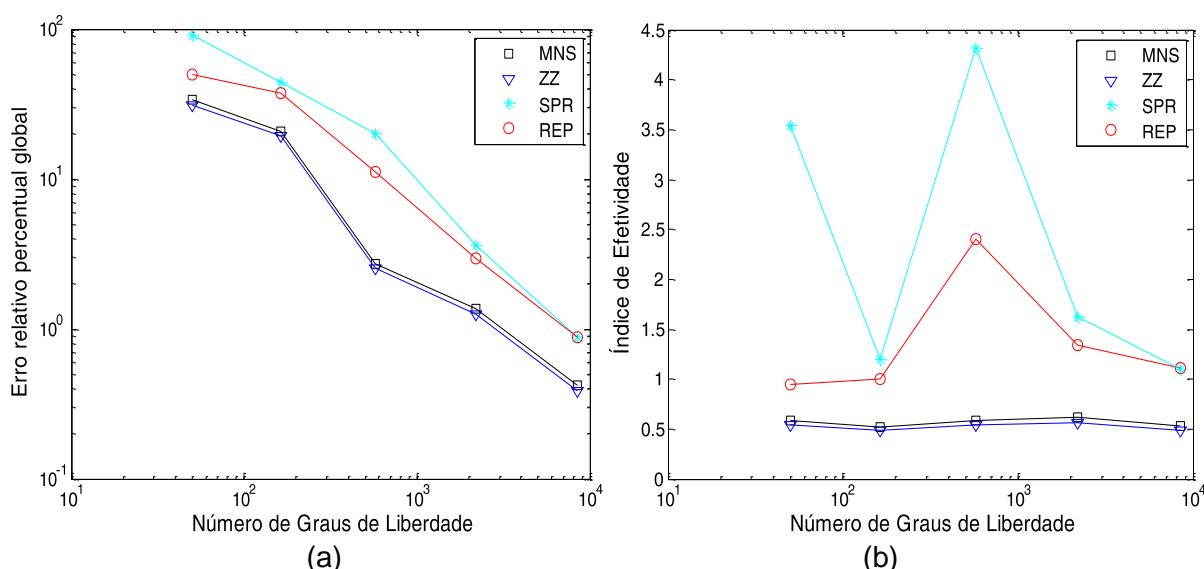


Figura 25 – Problema 3: (a) Erro relativo percentual global para elemento LST. (b) Índice de efetividade global para elemento LST.

Tabela 16 – Resultados do Problema 3: Elemento LST e refino uniforme.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
<b>Média Nodal Simples (MNS)</b>	$\eta$	33,80%	20,88%	2,73%	1,37%	0,42%
	$\theta$	0,5895	0,5249	0,5805	0,6207	0,5257
	<i>NGL</i>	50	162	578	2178	8450
	$D_\theta$	0,60	0,71	0,48	0,54	0,68
<b>Zienkiewicz e Zhu (ZZ)</b>	$\eta$	31,10%	19,29%	2,55%	1,26%	0,39%
	$\theta$	0,5371	0,4832	0,5430	0,5690	0,4883
	<i>NGL</i>	50	162	578	2178	8450
	$D_\theta$	0,57	0,53	0,48	0,57	0,67
<b>Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)</b>	$\eta$	90,72%	43,94%	19,93%	3,59%	0,88%
	$\theta$	3,5389	1,2026	4,3225	1,6262	1,1042
	<i>NGL</i>	50	162	578	2178	8450
	$D_\theta$	4,92	4,36	7,37	1,87	0,69
<b>Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)</b>	$\eta$	49,88%	37,71%	11,23%	2,97%	0,88%
	$\theta$	0,9447	1,0008	2,4004	1,3433	1,1103
	<i>NGL</i>	50	162	578	2178	8450
	$D_\theta$	0,35	1,25	1,93	0,58	0,51

Observa-se, através da Tabela 16 e da Figura 25, que os estimadores MNS e ZZ não são efetivos na estimativa dos erros quando o elemento LST é aplicado (OH; BATRA, 1999). Por outro lado, os estimadores de erro REP e SPR, apresentam comportamentos muito próximos e se mostram aptos como estimadores de erro para esse elemento.

#### 4.6.1 Padrões de nós sobre o contorno

Assim como para o problema plano de condução térmica, a característica de superconvergência envolvendo os nós sobre os contornos é estudada para o corrente problema. De maneira a investigar essa especificidade imposta ao problema de elasticidade plana, é utilizado, considerando o elemento CST (Tabela 17 e Figura 26) e LST (Tabela 18 e Figura 27), o estimador SPR para ambas as abordagens discutidas na subseção 4.4.1.

Tabela 17 - Resultados do Problema 3: Comparação entre abordagem clássica e abordagem teste para elemento CST, estimador SPR e refino uniforme.

Abordagem		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
Teste	$\eta$	61,73%	45,36%	29,60%	16,50%	8,13%
	$\theta$	0,6963	0,8687	1,0148	1,0762	1,0439
	NGL	50	162	578	2178	8450
	$D_\theta$	0,94	0,82	0,42	0,37	0,28
Clássica	$\eta$	61,45%	44,83%	29,41%	16,45%	8,12%
	$\theta$	0,6912	0,8561	1,0076	1,0726	1,0420
	NGL	50	162	578	2178	8450
	$D_\theta$	0,74	0,71	0,35	0,33	0,26

Constata-se, através da Tabela 17 e da Figura 26 que, para o elemento CST, resultados com qualidade inferior são encontrados quando ocorre a inclusão dos nós do contorno na recuperação do campo de tensões (abordagem teste), comprovando as afirmações realizadas por Zienkiewicz e Zhu (1992a, 1992b, 1995).

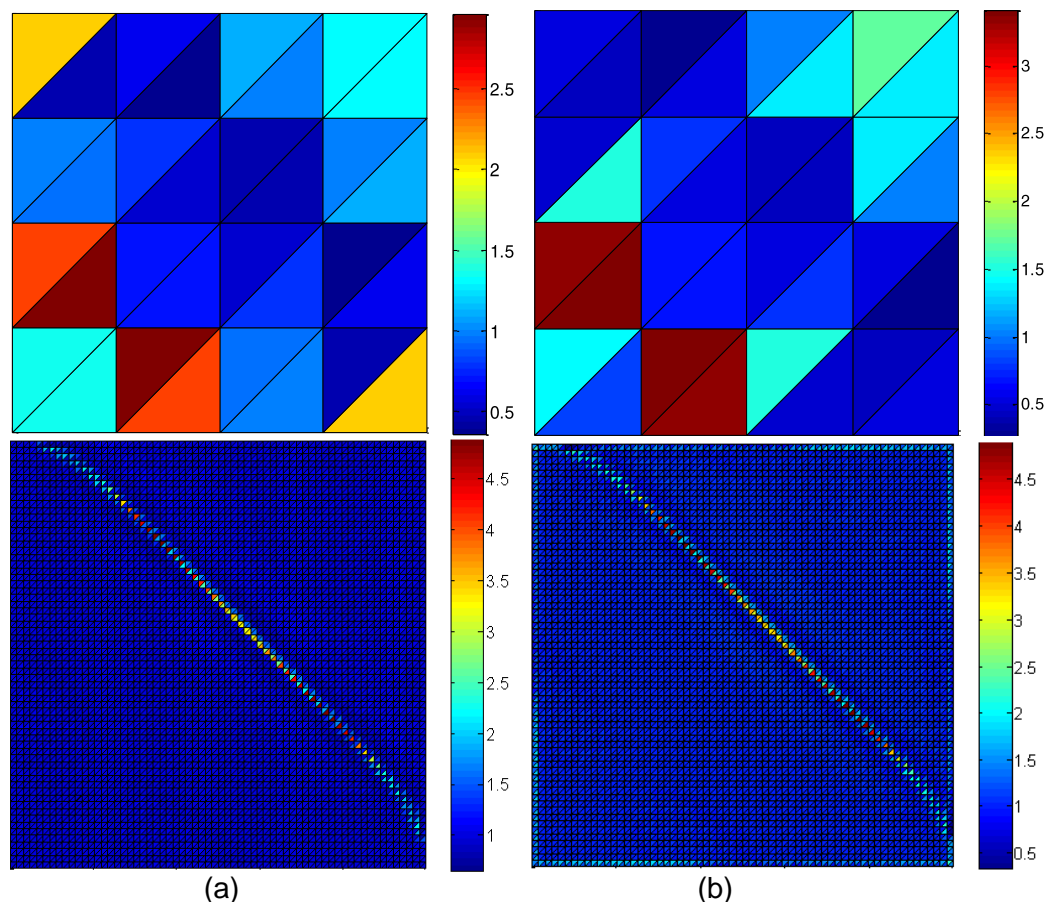


Figura 26 – Problema 3: Índices de efetividades elementares para elemento CST e estimador SPR. (a) Abordagem Clássica. (b) Abordagem teste.

Ao contrário do observado para o elemento CST, quando é utilizada a abordagem teste para o elemento LST (Tabela 18 e Figura 27), são obtidos melhores resultados. Ou seja, são encontrados melhores índices de efetividades globais e elementares.

Tabela 18 - Resultados do Problema 3: Comparação entre abordagem clássica e abordagem teste para elemento LST, estimador SPR e refino uniforme.

Abordagem		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
Teste	$\eta$	46,09%	36,10%	10,73%	2,95%	0,85%
	$\theta$	0,8525	0,9515	2,2931	1,3363	1,0744
	$NGL$	50	162	578	2178	8450
	$D_\theta$	0,46	1,64	2,02	0,75	0,44
Clássica	$\eta$	90,72%	43,94%	19,93%	3,59%	0,88%
	$\theta$	3,5389	1,2026	4,3225	1,6262	1,1042
	$NGL$	50	162	578	2178	8450
	$D_\theta$	4,92	4,36	7,37	1,87	0,69

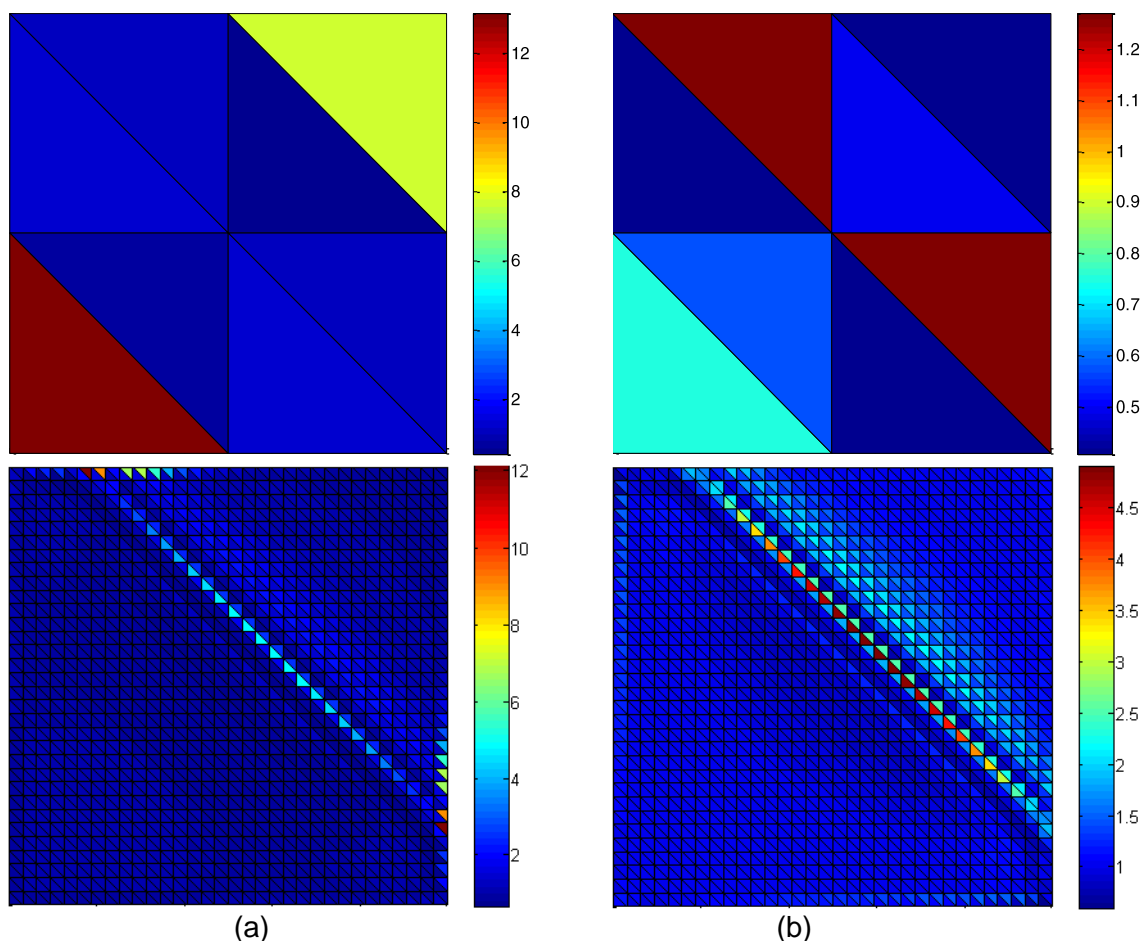


Figura 27 – Problema 3: Índices de efetividades elementares para elemento LST e estimador SPR. (a) Abordagem Clássica. (b) Abordagem teste.

#### 4.7 PROBLEMA DE ELASTICIDADE PLANA – REFINO $H$ -ADAPTATIVO

Nesta seção são comparados os diversos estimadores de erros como guias de um processo  $h$ -adaptativo aplicado ao problema de elasticidade plana e empregando os elementos CST e LST. O problema de valor de contorno analisado é o mesmo proposto na seção 4.6. Os parâmetros de discussão e comparação dos estimadores são idênticos aos utilizados para o problema plano de condução térmica  $h$ -adaptativo. Além disso, a aplicação e a comparação dos dois critérios de malhas ótimas apresentados neste trabalho também são realizadas.

#### 4.7.1 Análise dos estimadores de erro como guia de um processo $h$ -adaptativo

Inicialmente os seguintes parâmetros são adotados: elemento CST, uma malha uniforme com 200 elementos, erro relativo percentual admissível de 10% da energia total e critério de malha ótima de equidistribuição do erro. Nesse caso, os resultados finais que caracterizam o processo adaptativo são exibidos na Tabela 19. Através da Figura 28 é possível visualizar a malha que cada estimador conduz ao longo do processo adaptativo, além do parâmetro de refinamento local individual para cada elemento.

Como mencionado anteriormente, a maioria dos trabalhos apresentados utilizando refino  $h$ -adaptativo, independentemente do problema linear abordado, usa somente um critério de convergência global, o qual é geralmente alcançado em apenas duas iterações, como demonstrado por meio da Tabela 19 para todos os estimadores. Porém, através de três parâmetros discutidos neste trabalho, ou seja, o máximo valor do parâmetro de refinamento elementar ( $\zeta_{ie,m\acute{a}x}$ ), a média simples dos valores do parâmetro de erro local elementar ( $\bar{\zeta}_{ie,med}$ ) e o desvio do parâmetro de erro local elementar ( $D_{\bar{\zeta}_{ie}}$ ), algumas observações podem ser feitas.

Observando a malha 3 em comparação com a malha 4 do processo adaptativo, para todos os estimadores, é percebida uma acentuada queda do desvio do parâmetro de erro local elementar ( $D_{\bar{\zeta}_{ie}}$ ) e uma aproximação da média simples dos valores do parâmetro de erro local elementar ( $\bar{\zeta}_{ie,med}$ ) da unidade, características essas, que demonstram uma relativa melhora da malha adaptada. Por outro lado, esses parâmetros sofrem uma reduzida oscilação quando do refino da malha 4 para a malha 5.

Também é possível observar que, caso o critério de convergência fosse local (nesse caso, o máximo valor do parâmetro de refinamento elementar), dependendo da tolerância adotada, o mesmo não seria obtido por esse processo, chegando muitas vezes próximo de ser satisfeito, como por exemplo, atingindo 1,37 para o máximo valor do parâmetro de refinamento elementar utilizando o estimador ZZ. Uma possível explicação para este fato é a influência do gerador de malhas utilizado, o qual, não é abordado no corrente trabalho.

Em relação à qualidade dos estimadores, como verificado para o problema escalar de temperatura, todos os estimadores de erro apresentados utilizando elemento CST se mostram efetivos também para o problema vetorial exposto, destacando-se a total equidade entre os estimadores SPR e REP (BORROOMAND; ZIENKIEWICZ, 1997a).

Tabela 19 – Resultados do Problema 3: Elemento CST, refino  $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição do erro.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
<b>Média Nodal Simples (MNS)</b>	$\eta$	38,94%	8,35%	6,78%	6,96%	7,97%
	$\theta$	0,9031	1,0046	1,0396	1,0374	1,0416
	$NGL$	242	3210	3640	2776	2222
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	10,41	6,23	1,80	1,45	2,15
	$D_{\theta}$	0,61	0,41	0,33	0,41	0,45
	$D_{\zeta_{ie}}$	0,69	0,73	0,53	0,29	0,26
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,77	0,73	0,86	0,96	0,97
<b>Zienkiewicz e Zhu (ZZ)</b>	$\eta$	35,48%	8,65%	7,27%	7,21%	7,72%
	$\theta$	0,8107	0,9679	0,9955	0,9915	0,9905
	$NGL$	242	2426	2930	2454	2022
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	8,16	5,93	1,71	1,40	1,37
	$D_{\theta}$	0,39	0,13	0,12	0,12	0,12
	$D_{\zeta_{ie}}$	0,71	0,67	0,52	0,28	0,24
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,75	0,78	0,86	0,96	0,97
<b>Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)</b>	$\eta$	39,17%	7,98%	6,85%	7,25%	8,13%
	$\theta$	0,9092	1,0870	1,0419	1,0406	1,0431
	$NGL$	242	3222	3286	2508	2094
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	10,40	7,68	1,67	1,58	2,09
	$D_{\theta}$	0,58	0,39	0,38	0,41	0,44
	$D_{\zeta_{ie}}$	0,68	0,68	0,47	0,27	0,26
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,77	0,77	0,89	0,96	0,97
<b>Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)</b>	$\eta$	39,17%	7,98%	6,85%	7,25%	8,13%
	$\theta$	0,9092	1,0870	1,0419	1,0406	1,0431
	$NGL$	242	3222	3286	2508	2094
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	10,40	7,68	1,67	1,58	2,09
	$D_{\theta}$	0,58	0,39	0,38	0,41	0,44
	$D_{\zeta_{ie}}$	0,68	0,68	0,47	0,27	0,26
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,77	0,77	0,89	0,96	0,97



De modo a confrontar a qualidade dos estimadores de erro, quando da aplicação em um processo  $h$ -adaptativo, empregando o elemento LST, é adotada como configuração inicial: malha uniforme com 72 elementos, erro relativo percentual admissível de 3% da energia total e critério de malha ótima de equidistribuição do erro. Os resultados são expostos na Tabela 20. Na Figura 29 observa-se a malha produzida por cada estimador, além do parâmetro de erro local individual para cada elemento.

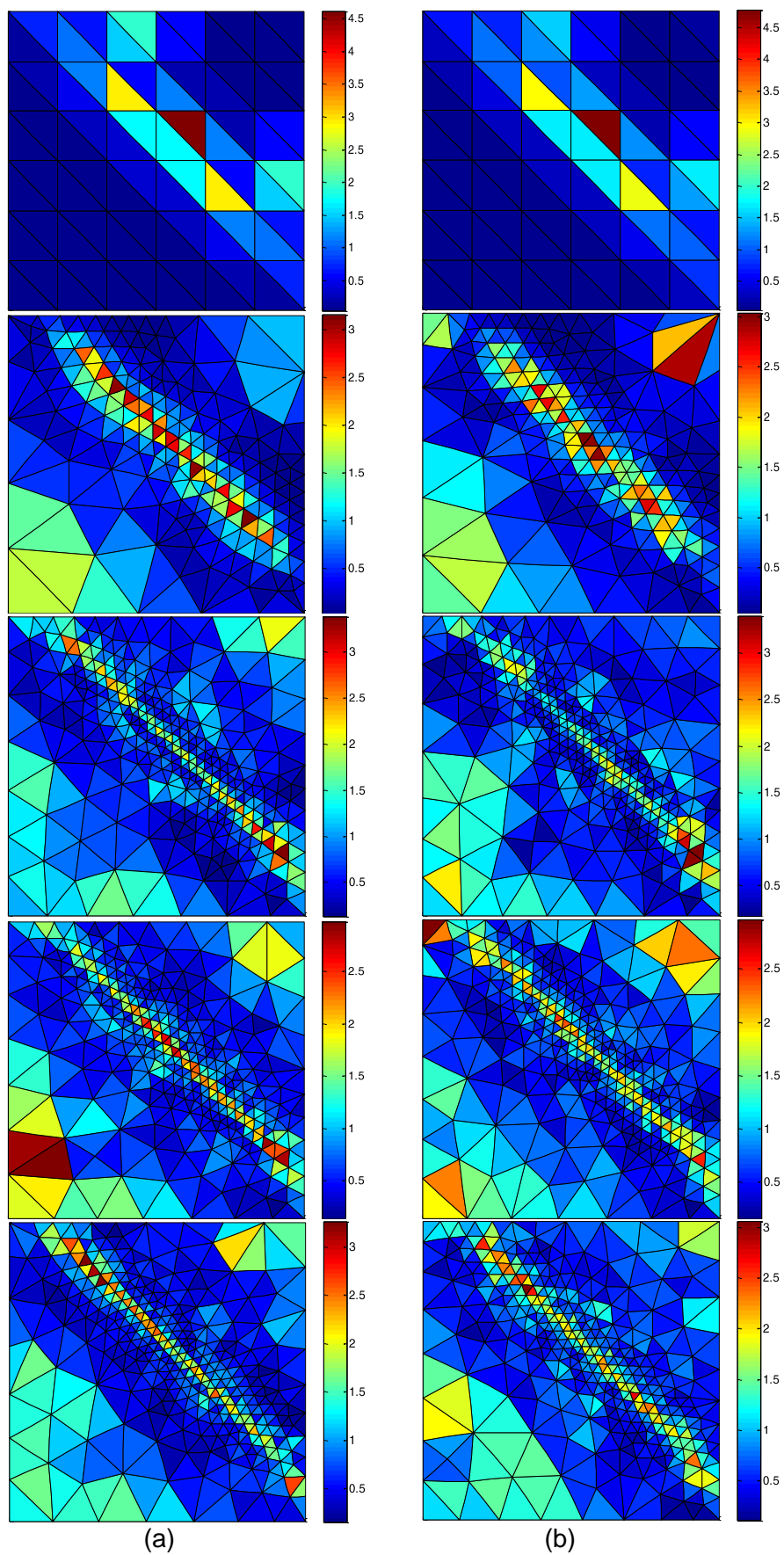


Figura 29 – Problema 3: Parâmetro de erro local para elemento LST e critério de equidistribuição do erro. (a) Estimador SPR. (b) Estimador REP.



Tabela 20 - Resultados do Problema 2: Elemento LST, refino  $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
<b>Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)</b>	$\eta$	22,50%	5,30%	2,28%	2,22%	2,36%
	$\theta$	1,9390	1,2718	1,2395	1,2484	1,2109
	$NGL$	338	1298	2140	2180	2254
	$\zeta_{ie,máx}$	34,62	5,56	2,57	2,20	2,56
	$D_{\theta}$	2,24	0,69	0,56	0,57	0,61
	$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	0,92	0,75	0,54	0,56	0,58
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,58	0,72	0,85	0,84	0,83
<b>Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)</b>	$\eta$	23,05%	4,92%	2,11%	2,13%	2,10%
	$\theta$	1,9890	1,3167	1,1994	1,1729	1,2261
	$NGL$	338	1398	2216	2242	2230
	$\zeta_{ie,máx}$	36,62	4,98	2,39	2,10	2,14
	$D_{\theta}$	2,04	0,87	0,80	0,68	0,71
	$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	0,91	0,72	0,52	0,53	0,53
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,59	0,74	0,87	0,86	0,86

Neste caso, somente os estimadores REP e SPR são utilizados, uma vez que, os estimadores MNS e ZZ apresentam índices de efetividade pouco adequados para esse tipo de elemento. Pode-se perceber na Tabela 20 e na Figura 29 que ambos os estimadores apresentam resultados próximos, conduzindo de maneira satisfatória o processo adaptativo. Além disso, o critério de convergência global é alcançado na segunda iteração, enquanto que o critério local não é satisfeito. Quanto ao número de graus de liberdade final que cada estimador conduz têm-se valores aproximados.

#### 4.7.2 Influência do critério de malha ótima

Com a finalidade de verificar a diferença dos critérios de malha ótima apresentados, realiza-se uma nova análise com os mesmos parâmetros iniciais utilizados anteriormente (elemento CST), porém, empregando o critério de equidistribuição do erro específico juntamente com o estimador SPR. Uma comparação entre os parâmetros dos dois critérios pode ser observada na Tabela 21 e as malhas e parâmetros de erro local elementar na Figura 30.

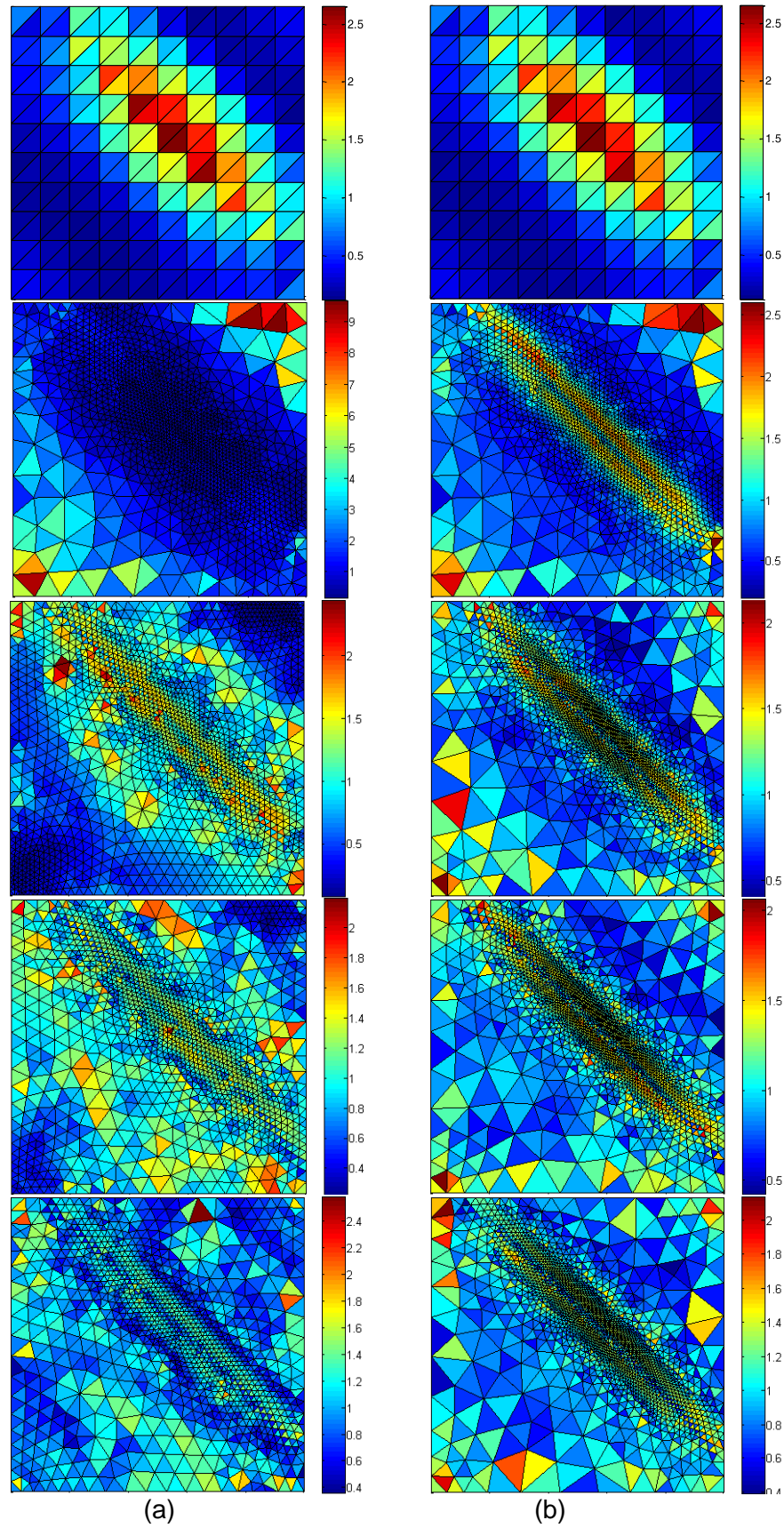


Figura 30 – Problema 3: Parâmetro de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) para elemento CST e estimador SPR.  
 (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico.

Tabela 21 – Problema 3: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador SPR e elemento CST.

Critério de malha ótima		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
Equidistribuição do erro específico	$\eta$	39,17%	7,98%	7,24%	7,18%	7,80%
	$\theta$	0,9092	1,0870	1,0387	1,0470	1,0695
	$NGL$	242	3222	4024	4018	3984
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	10,40	2,07	1,54	1,48	1,66
	$D_{\theta}$	0,58	0,39	0,33	0,34	0,31
	$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	0,68	0,48	0,30	0,28	0,23
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,77	1,08	1,14	1,15	1,07
Equidistribuição do erro	$\eta$	39,17%	7,98%	6,85%	7,25%	8,13%
	$\theta$	0,9092	1,0870	1,0419	1,0406	1,0431
	$NGL$	242	3222	3286	2508	2094
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	10,40	7,68	1,67	1,58	2,09
	$D_{\theta}$	0,58	0,39	0,38	0,41	0,44
	$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	0,68	0,68	0,47	0,27	0,26
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,77	0,77	0,89	0,96	0,97

Como percebido para os demais problemas, o resultado final para um mesmo erro relativo percentual admissível apresenta uma acentuada diferença no número de graus de liberdade do sistema, onde o critério de erro específico fica caracterizado por apresentar um número mais elevado de elementos nas regiões de maior gradiente.

Por fim, excluindo os estimadores MNS e ZZ, os quais não se mostraram efetivos no cálculo dos erros elementares com o elemento LST para o corrente problema, e o estimador REP, o qual é comparativamente equivalente em precisão com estimador SPR e apresenta comportamento instável. O estimador SPR é aplicado como guia de um processo  $h$ -adaptativo empregando o elemento LST de modo a comparar o critério de equidistribuição de erro e equidistribuição do erro específico.

Dessa maneira, parte-se de uma malha uniforme com 72 elementos e 3% de erro percentual global admissível, sendo os resultados expostos na Tabela 22 e visualizados na Figura 31.

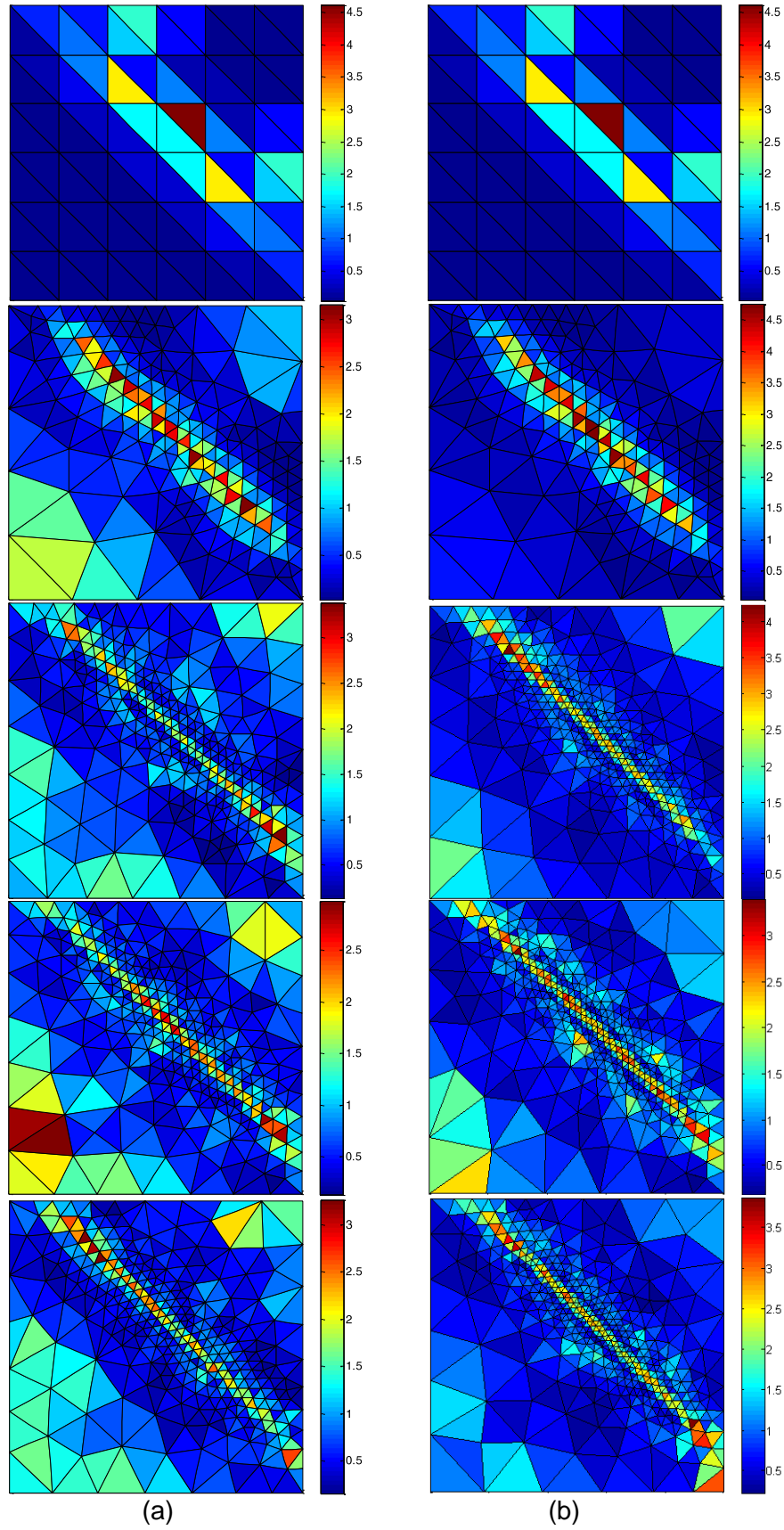


Figura 31 – Problema 3: Parâmetro de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) para elemento LST e estimador SPR  
 (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico.

Tabela 22 – Problema 3: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador SPR, elemento LST e refino  $h$ -adaptativo.

Critério de malha ótima		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
Equidistribuição do erro específico	$\eta$	22,50%	5,30%	1,95%	1,79%	1,68%
	$\theta$	1,9390	1,2718	1,1847	1,1332	1,1967
	$NGL$	338	1298	2738	2962	3092
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	34,62	8,40	2,74	2,02	2,16
	$D_{\theta}$	2,24	0,69	0,56	0,53	0,54
	$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	0,92	1,06	0,72	0,63	0,66
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,58	0,96	1,07	1,06	1,10
Equidistribuição do erro	$\eta$	22,50%	5,30%	2,28%	2,22%	2,36%
	$\theta$	1,9390	1,2718	1,2395	1,2484	1,2109
	$NGL$	338	1298	2140	2180	2254
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	34,62	5,56	2,57	2,20	2,56
	$D_{\theta}$	2,24	0,69	0,56	0,57	0,61
	$D_{\bar{\zeta}_{ie}}$	0,92	0,75	0,54	0,56	0,58
	$\bar{\zeta}_{ie,med}$	0,58	0,72	0,85	0,84	0,83

Através dos resultados do processo  $h$ -adaptativo, percebe-se que o critério de equidistribuição do erro elementar, aplicado para o problema vetorial de elasticidade plana empregando elemento LST, conduz a uma malha com número de graus de liberdade significativamente inferior e uma distribuição do parâmetro de erro local ( $\bar{\zeta}_{ie}$ ) relativamente mais suave se comparada ao critério de equidistribuição do erro específico. Além disso, conclui-se que o estimador SPR tem a capacidade de guiar um processo  $h$ -adaptativo utilizando elemento LST. Porém, os erros globais e elementares para malhas não estruturadas utilizando esse elemento não são tão precisos quanto para o elemento CST. Nesse sentido, analisando-se o conceito de índice de efetividade, o que se espera são valores superestimados do erro e malhas mais finas do que o necessário, já que em todas as iterações os índices de efetividades globais resultaram em valores superiores a unidade.

#### 4.8 PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE VIGA DE EULER-BERNOULLI – REFINO UNIFORME

O quarto problema proposto no corrente trabalho trata da flexão de viga fina elástica, linear e isotrópica de Euler-Bernoulli. O objetivo é encontrar a função deflexão da viga  $w(x)$  que satisfaça uma equação diferencial de quarta ordem e as condições de contorno. Nesse caso específico, o problema de valor de contorno pode ser posto como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) &= f, \quad \text{para } \forall x \in \Omega = (0, L) \subset \mathbb{R}^1 \\ w(0) &= w_o, \quad w(L) = w_L, \quad \left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = r_o \quad \text{e} \quad \left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=L} = r_L, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde  $I = 50.10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $L = 2 \text{ m}$ ,  $r_o = r_L = 0$  e  $w_o = w_L = 0$ . Nesse exemplo,  $I$  corresponde ao momento de inércia da seção transversal,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material,  $r_o$  e  $r_L$  são rotações prescritas nas extremidades da viga e  $f = f(x)$  é uma função carregamento transversal à viga definido na forma de força por unidade de comprimento.

Uma maneira alternativa de visualizar o problema de valor de contorno posto acima para  $EI$  constante, é através de sua forma variacional equivalente:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } w(x) \in H^2(\Omega) \text{ que satisfaz} \\ EI \int_{\Omega} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} d\Omega &= \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nesse caso, são feitas as definições:

$$\begin{aligned} B(w, v) &= EI \int_{\Omega} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 v}{dx^2} d\Omega \quad \text{e} \\ I(v) &= \int_{\Omega} f v d\Omega. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Com isso, a Eq. (4.23) equivale ao problema de valor de contorno variacional

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } w(x) \in H^2(\Omega) \text{ que satisfaz} \\ &B(w, v) = I(v), \quad \forall \quad v \in H_0^2(\Omega), \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde  $B(\cdot, \cdot)$  é a forma bilinear contínua associada ao problema e definida em  $H^2 \times H^2$ ,  $v$  é uma função de variação cinematicamente admissível,  $I(\cdot)$  é um funcional contínuo e linear e  $H^2$  é o espaço de funções nas quais sua primeira e segunda derivadas são quadraticamente integráveis.

Neste exemplo, a força externa distribuída,  $f$ , é encontrada tal que a solução analítica seja dada por uma modificação da solução analítica proposta por Zienkiewicz e Taylor (2000). Nesse caso,

$$w(x) = x(2-x)\tan^{-1}[\alpha(x-1)], \quad \text{onde } \alpha = 3. \quad (4.26)$$

Através da Figura 32 é possível visualizar o carregamento de domínio a que a viga é exposta, bem como a segunda e terceira derivadas da solução analítica proposta.

O objetivo do problema corrente é identificar e discutir as características e eficiência dos diferentes estimadores de erro *a posteriori* aplicados ao problema de flexão de viga de Euler-Bernoulli, o qual é regido por um operador diferencial de quarta ordem. Para tanto, são utilizadas funções de interpolação cúbicas, sendo que cada elemento possui dois nós com dois graus de liberdade cada. Além disso, diferentemente dos problemas apresentados anteriormente, onde a estimativa dos erros era realizada através da norma em energia e as variáveis recuperadas eram o campo de tensões (problema unidimensional de barra e problema de elasticidade plana) ou os fluxos de calor (problema plano de condução térmica), para o corrente problema existem duas alternativas predominantes quanto à maneira na qual os valores recuperados podem ser obtidos.

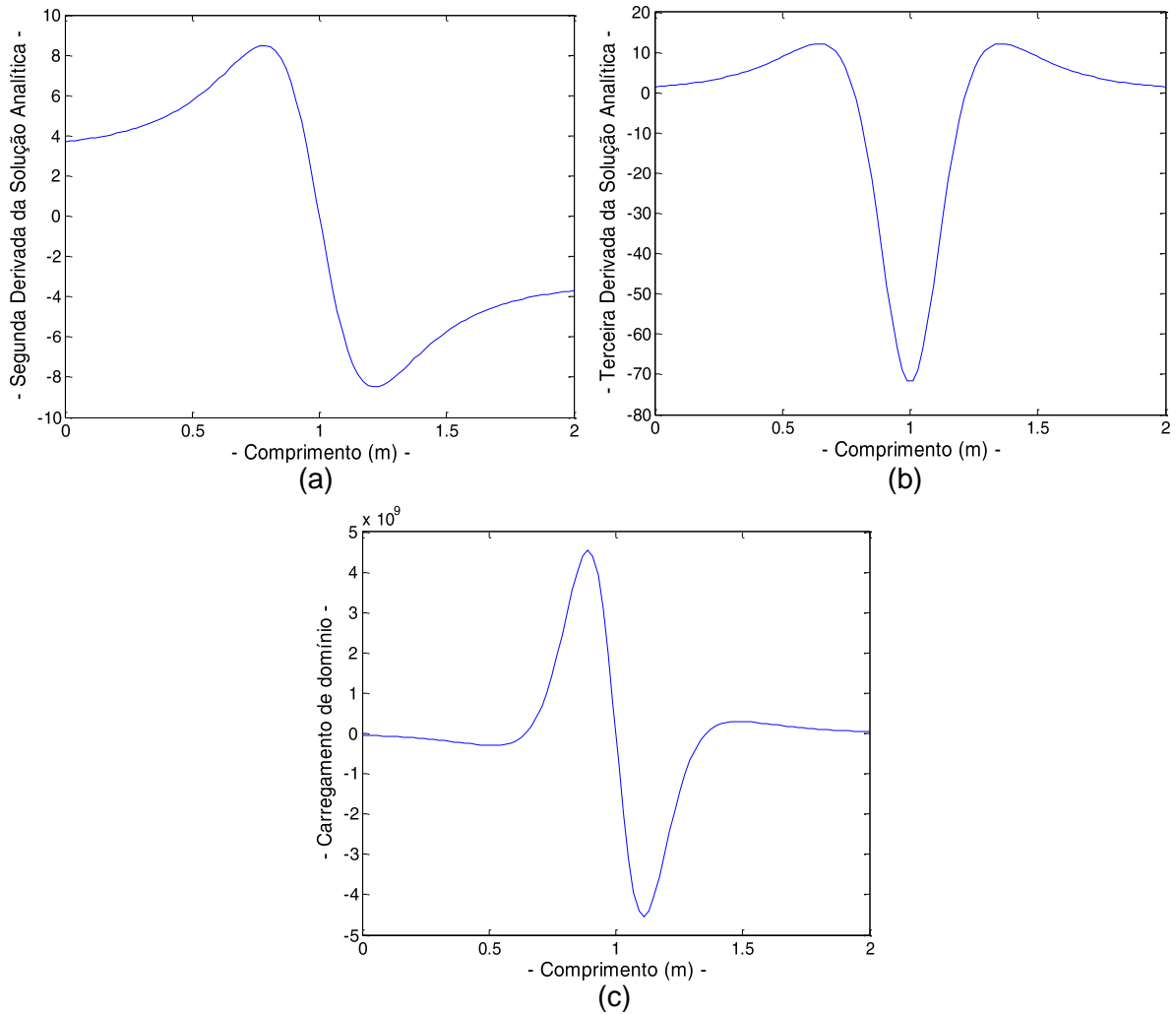


Figura 32 – Problema 4: (a) Segunda derivada da solução analítica. (b) Terceira derivada da solução analítica. (c) Carregamento analítico.

Matematicamente sabe-se que os erros dominantes ocorrem na derivada superior de uma dada equação diferencial, nesse caso, na terceira derivada da solução. Por outro lado, fisicamente, o corrente problema é caracterizado por possuir a grande maioria de sua energia de deformação ocasionada por tensões de flexão, a qual é proporcional ao momento fletor, ou seja, proporcional à segunda derivada da solução a menos de uma constante.

Dessa maneira, propõem-se duas formas de análise. A primeira refere-se a avaliar os quatro estimadores de erros (ou seja, quatro formas distintas de recuperação dos campos das derivadas) aplicados para guiar um processo adaptativo baseado na seminorma de ordem três do erro elementar, dada por

$$\|\mathbf{e}_V^*\|^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{V}^* - \hat{\mathbf{V}})^T (\mathbf{V}^* - \hat{\mathbf{V}}) d\Omega, \quad (4.27)$$



sendo  $\mathbf{V}^*$  os valores recuperados elementares da terceira derivada. Esses valores podem ser obtidos através de uma adaptação dos métodos de recuperação apresentados, substituindo o campo de tensões elementares de elementos finitos por valores elementares da terceira derivada da solução dada via MEF ( $\hat{\mathbf{V}}$ ), expressa por

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{D}_v \hat{\mathbf{w}}, \quad (4.28)$$

onde  $\hat{\mathbf{w}}$  denota as deflexões elementares calculadas via MEF e  $\mathbf{D}_v$  representa a matriz de terceira derivadas das funções de forma de interpolação.

A segunda alternativa é empregar os estimadores de erro para guiar um processo  $h$ -adaptativo com base na seminorma de ordem dois do erro elementar, dada por

$$\|\mathbf{e}_M^*\|^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{M}^* - \hat{\mathbf{M}})^T (\mathbf{M}^* - \hat{\mathbf{M}}) d\Omega, \quad (4.29)$$

sendo  $\mathbf{M}^*$  os valores elementares recuperados da segunda derivada. Da mesma maneira, esses valores podem ser obtidos substituindo o campo de tensões elementares pelos valores da segunda derivada elementar da solução dada via MEF ( $\hat{\mathbf{M}}$ ), a qual pode ser expressa por:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{D}_m \hat{\mathbf{w}}, \quad (4.30)$$

onde  $\mathbf{D}_m$  representa a matriz de segunda derivada das funções de forma elementar de interpolação.

Anterior à aplicação das abordagens propostas, a corrente seção destina-se a verificar como os diferentes estimadores de erro comportam-se quanto a um refino uniforme da malha, tanto em terceira derivada, quanto em segunda derivada. Assim, inicialmente a análise é realizada em terceira derivada, sendo os parâmetros que caracterizam os estimadores podem ser observados na Tabela 23 e a taxa de

convergência do erro e o índice de efetividade global em função do número de graus de liberdade apresentados na Figura 33.

Tabela 23 – Resultados do Problema 4: Recuperação da terceira derivada e refino uniforme.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5	Malha 6
Média Nodal Simples (MNS)	$\eta_3^*$	24,24%	11,46%	5,56%	2,75%	1,37%	0,69%
	$\theta$	1,1415	1,0514	1,0142	1,0037	1,0009	1,0002
	$NGL$	42	82	162	322	642	1282
	$D_\theta$	1,59	0,39	0,38	0,58	0,13	0,09
	$\eta_2$	1,0712%	0,2711%	0,0680%	0,0170%	0,0043%	0,0011%
Zienkiewicz e Zhu (ZZ)	$\eta_3^*$	22,10%	11,00%	5,49%	2,74%	1,37%	0,69%
	$\theta$	1,0349	1,0094	1,0024	1,0006	1,0001	1,0000
	$NGL$	42	82	162	322	642	1282
	$D_\theta$	0,19	0,07	0,07	0,12	0,03	0,02
	$\eta_2$	1,0712%	0,2711%	0,0680%	0,0170%	0,0043%	0,0011%
Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)	$\eta_3^*$	24,24%	11,46%	5,56%	2,75%	1,37%	0,69%
	$\theta$	1,1415	1,0514	1,0142	1,0037	1,0009	1,0002
	$NGL$	42	82	162	322	642	1282
	$D_\theta$	1,59	0,39	0,38	0,58	0,13	0,09
	$\eta_2$	1,0712%	0,2711%	0,0680%	0,0170%	0,0043%	0,0011%
Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)	$\eta_3^*$	24,24%	11,46%	5,56%	2,75%	1,37%	0,69%
	$\theta$	1,1415	1,0514	1,0142	1,0037	1,0009	1,0002
	$NGL$	42	82	162	322	642	1282
	$D_\theta$	1,59	0,39	0,38	0,58	0,13	0,09
	$\eta_2$	1,0712%	0,2711%	0,0680%	0,0170%	0,0043%	0,0011%

Nesse caso, todos os estimadores de erro se mostram eficientes e possuem precisões muito próximas, com índice de efetividade global ( $\theta$ ) tendendo a unidade e desvio do índice de efetividade ( $D_\theta$ ) tendendo a zero à medida que o número de graus de liberdade do sistema é aumentado. Esse processo pode ser comparado ao caso unidimensional de barra utilizando elemento linear, onde o gradiente da solução apresenta resposta constante e os estimadores de erro funcionam efetivamente. Além disso, pela Tabela 23 se pode notar que o erro relativo percentual global em terceira derivada obtido pelos respectivos estimadores ( $\eta_3^*$ ) é

várias ordens de grandeza superior ao erro relativo percentual global analítico em segunda derivada ( $\eta_2$ ).

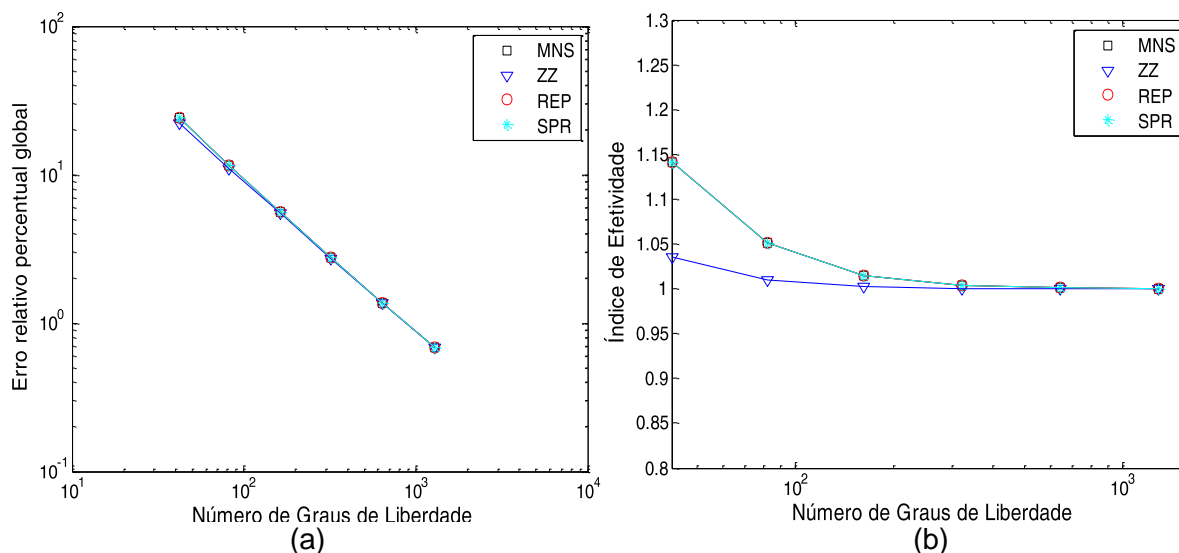


Figura 33 – Problema 4: (a) Erro relativo percentual global para recuperação na terceira derivada. (b) Índice de efetividade global recuperação na terceira derivada.

Por fim, os estimadores são aplicados ao erro escrito na segunda derivada da solução, podendo ser feita uma analogia com o caso unidimensional de barra empregando elemento quadrático, onde a derivada da solução é linear. Como a solução recuperada precisa ser uma ordem polinomial acima do gradiente da solução de elementos finitos para que possa medir o erro adequadamente, neste caso, por se possuir um elemento de somente dois nós, cria-se um nó virtual localizado no centro de cada elemento. Com isso, utilizando funções de forma quadráticas, o campo de valores recuperados da segunda derivada da solução pode ser obtido.

Os resultados para os diversos estimadores são apresentados na Tabela 24 e na Figura 34. Semelhantemente ao problema unidimensional de barra, quando o erro a ser medido é em uma variável linear, somente os estimadores de erro baseados em padrões, SPR e REP, se mostram capazes de recuperar a solução de forma eficiente conduzindo a bons índices de efetividade.

Tabela 24 – Resultados do Problema 4: Recuperação da segunda derivada e refino uniforme.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5	Malha 6
Média Nodal Simples (MNS)	$\eta_2^*$	2,1642%	0,3145%	0,0430%	0,0055%	0,0007%	0,0001%
	$\theta$	0,7028	0,4209	0,2280	0,1165	0,0586	0,0293
	$NGL$	26	50	98	194	386	770
	$D_\theta$	0,83	0,88	1,20	0,89	0,94	0,97
	$\eta_3$	36,56%	18,07%	9,12%	4,57%	2,28%	1,14%
Zienkiewicz e Zhu (ZZ)	$\eta_2^*$	1,9776%	0,2973%	0,0421%	0,0055%	0,0007%	0,0001%
	$\theta$	0,6422	0,3978	0,2232	0,1158	0,0585	0,0293
	$NGL$	26	50	98	194	386	770
	$D_\theta$	0,87	1,00	1,28	0,89	0,94	0,97
	$\eta_3$	36,56%	18,07%	9,12%	4,57%	2,28%	1,14%
Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)	$\eta_2^*$	3,4546%	0,7216%	0,1849%	0,0470%	0,0118%	0,0030%
	$\theta$	1,1222	0,9656	0,9809	0,9944	0,9985	0,9992
	$NGL$	26	50	98	194	386	770
	$D_\theta$	0,65	0,30	0,34	0,02	0,02	0,17
	$\eta_3$	36,56%	18,07%	9,12%	4,57%	2,28%	1,14%
Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)	$\eta_2^*$	4,2166%	0,7266%	0,1833%	0,0468%	0,0118%	0,0030%
	$\theta$	1,3701	0,9723	0,9727	0,9916	0,9978	0,9990
	$NGL$	26	50	98	194	386	770
	$D_\theta$	1,08	0,52	0,50	0,02	0,02	0,17
	$\eta_3$	36,56%	18,07%	9,12%	4,57%	2,28%	1,14%

A Figura 35 apresenta as vistas ampliadas da recuperação do campo de valores da segunda derivada para os vários estimadores. A ampliação é feita na terceira malha no pico positivo da segunda derivada da função analítica plotada na Figura 32. Percebe-se que os valores recuperados dos estimadores MNS e ZZ não captam adequadamente a curvatura apresentada pela função analítica e à medida que a malha é refinada. Ao invés de tender à função analítica do problema, procede a uma taxa de convergência muito próxima da solução de elementos finitos. Esse fato explica o porquê em malhas refinadas esses estimadores não possuem bons índices de efetividade.

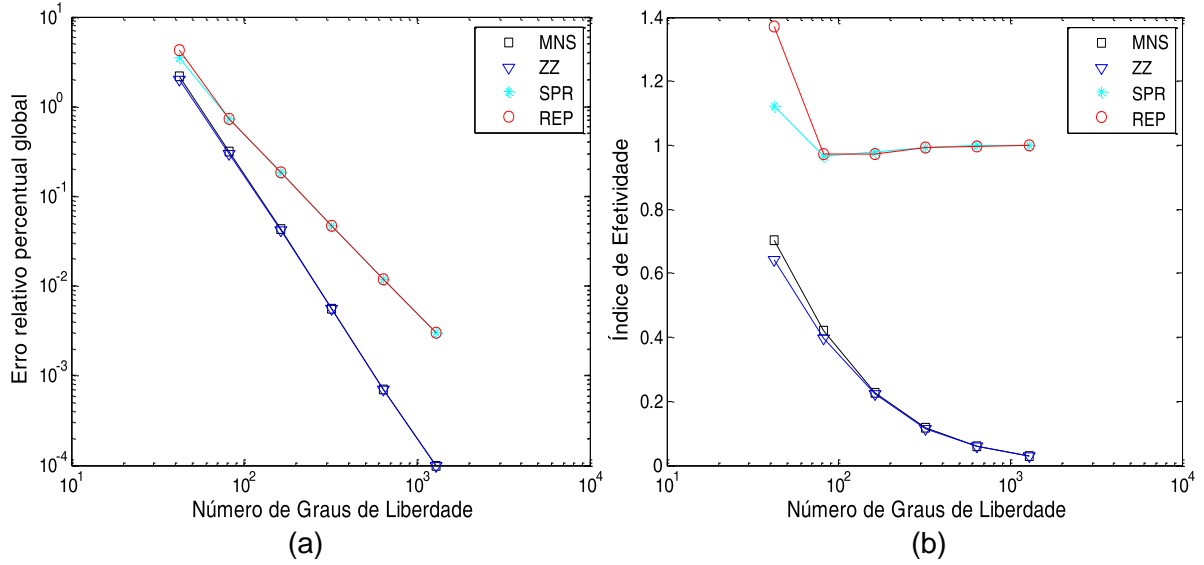


Figura 34 – Problema 4: (a) Erro relativo percentual global para recuperação na segunda derivada. (b) Índice de efetividade global para recuperação na segunda derivada.

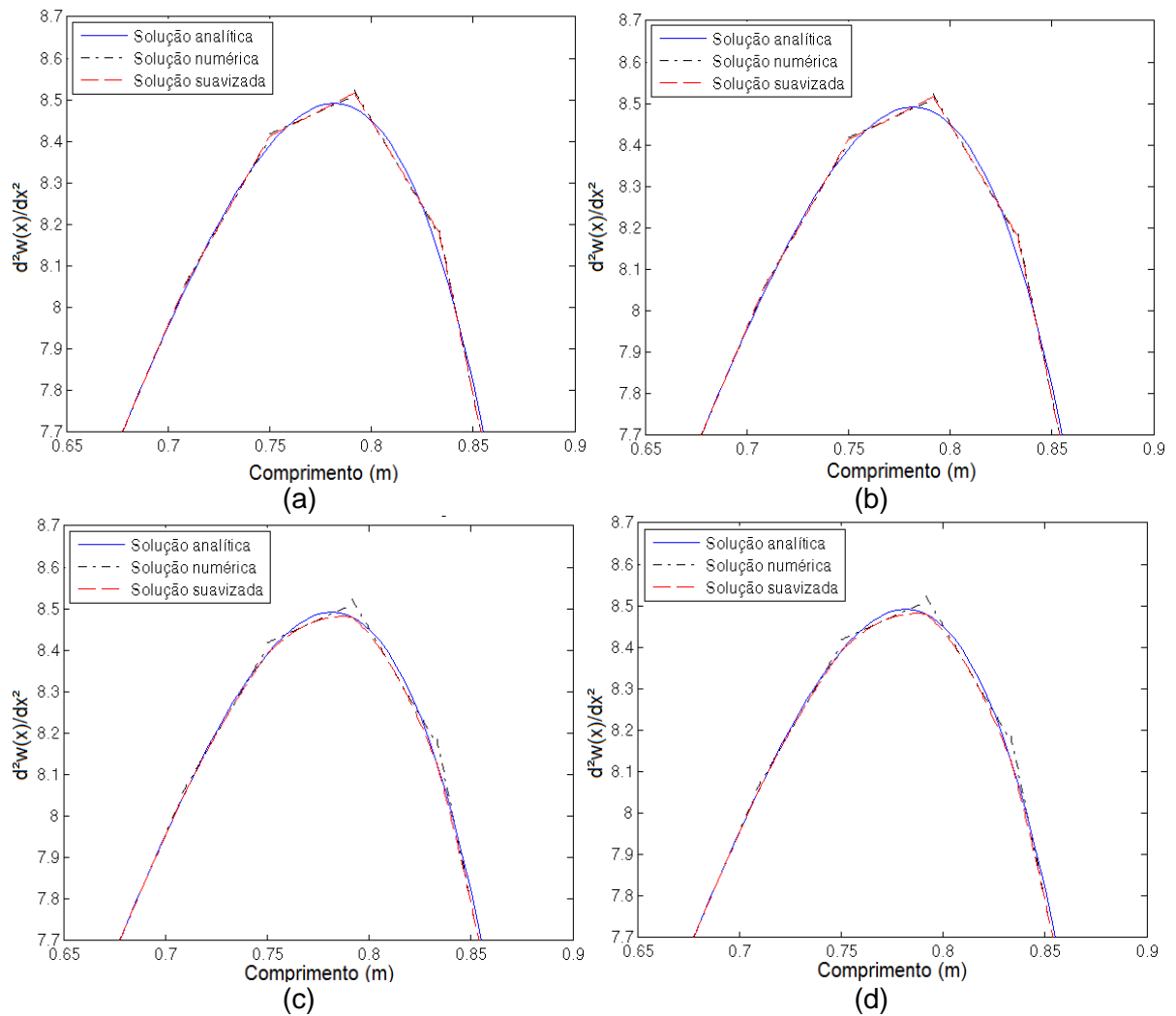


Figura 35 – Vista ampliada na recuperação da segunda derivada da solução numérica por: (a) Estimador MNS. (b) Estimador ZZ. (c) Estimador SPR. (c) Estimador REP.

## 4.9 PROBLEMA UNIDIMENSIONAL DE VIGA DE EULER-BERNOULLI – REFINO $H$ -ADAPTATIVO

Esta seção tem por objetivo comparar a aplicação dos estimadores de erro como guias do processo  $h$ -adaptativo conduzidos em terceira e segunda derivadas da solução no problema unidimensional de viga de Euler-Bernoulli proposto na seção anterior, para tanto, dois critérios de malha ótima são discutidos: equidistribuição do erro e equidistribuição do erro específico.

### 4.9.1 Análise dos estimadores de erro como guia de um processo $h$ -adaptativo

Como medida da eficiência dos vários estimadores de erro como guias do processo adaptativo, os mesmos parâmetros utilizados no problema unidimensional de barra são empregados. Além disso, um único critério de convergência definido por Oñate e Bugeda (1993), dado por meio da Eq. (3.57), é adotado. Neste caso, espera-se que o parâmetro de refinamento elementar ( $\zeta_{ie}$ ), o qual é definido pela multiplicação do parâmetro de erro global e o parâmetro de erro local elementar, esteja abaixo da unidade. Aplicando uma tolerância ao critério, é requerido que nenhum parâmetro de refinamento elementar ultrapasse 1,2. Modificações no parâmetro de refinamento utilizado para o cálculo dos novos tamanhos elementares, empregado para os problemas plano de condução térmica e de elasticidade plana, são visualizados na Figura 19 e aplicados ao corrente problema. Com isso, além de controlar o crescimento desordenado dos elementos, as regiões onde refinamentos são necessários aceleram sua convergência.

São empregados como parâmetros iniciais: recuperação do erro na terceira derivada da solução, malha uniforme com oito elementos, erro relativo percentual admissível de 1% e critério de malha ótima de equidistribuição do erro. As soluções iniciais e soluções convergentes (após a realização do processo adaptativo) para segunda derivada e terceira derivada para todos os estimadores de erro em estudo podem ser visualizadas da Figura 36 à Figura 47. Os resultados das iterações do processo adaptativo são fornecidos na Tabela 25.

Tabela 25 - Resultados do Problema 4: Recuperação da terceira derivada da solução, refino  $h$ -adaptativo e critério de equidistribuição.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5
Média Nodal Simples (MNS)	$\eta_3^*$	46,76%	10,98%	2,93%	1,40%	0,74%
	$\theta$	0,7161	1,0456	1,0047	1,0018	1,0009
	$NGL$	18	62	150	282	502
	$\zeta_{ie,máx}$	67,95	22,20	4,50	2,30	0,87
	$D_\theta$	3,92	1,34	0,80	0,20	0,31
	$\eta_2$	7,7973%	0,2603%	0,0286%	0,0094%	0,0032%
Zienkiewicz e Zhu (ZZ)	$\eta_3^*$	42,76%	9,45%	2,86%	1,46%	0,83%
	$\theta$	0,6403	1,0051	0,9958	0,9906	0,9969
	$NGL$	18	66	150	274	458
	$\zeta_{ie,máx}$	62,11	20,45	4,16	2,73	1,14
	$D_\theta$	3,10	0,18	0,13	0,12	0,09
	$\eta_2$	7,7973%	0,2226%	0,0321%	0,0116%	0,0050%
Superconvergente de Recuperação de Padrões (SPR)	$\eta_3^*$	46,76%	10,98%	2,94%	1,40%	0,75%
	$\theta$	0,7161	1,0463	1,0115	1,0090	1,0029
	$NGL$	18	62	150	282	498
	$\zeta_{ie,máx}$	67,95	22,20	4,62	2,38	0,90
	$D_\theta$	3,92	1,33	0,84	0,22	0,48
	$\eta_2$	7,7973%	0,2603%	0,0280%	0,0092%	0,0033%
Recuperação por Equilíbrio de Padrões (REP)	$\eta_3^*$	46,76%	10,98%	2,94%	1,40%	0,75%
	$\theta$	0,7161	1,0463	1,0115	1,0090	1,0029
	$NGL$	18	62	150	282	498
	$\zeta_{ie,máx}$	67,95	22,20	4,62	2,38	0,90
	$D_\theta$	3,92	1,33	0,84	0,22	0,48
	$\eta_2$	7,7973%	0,2603%	0,0280%	0,0092%	0,0033%

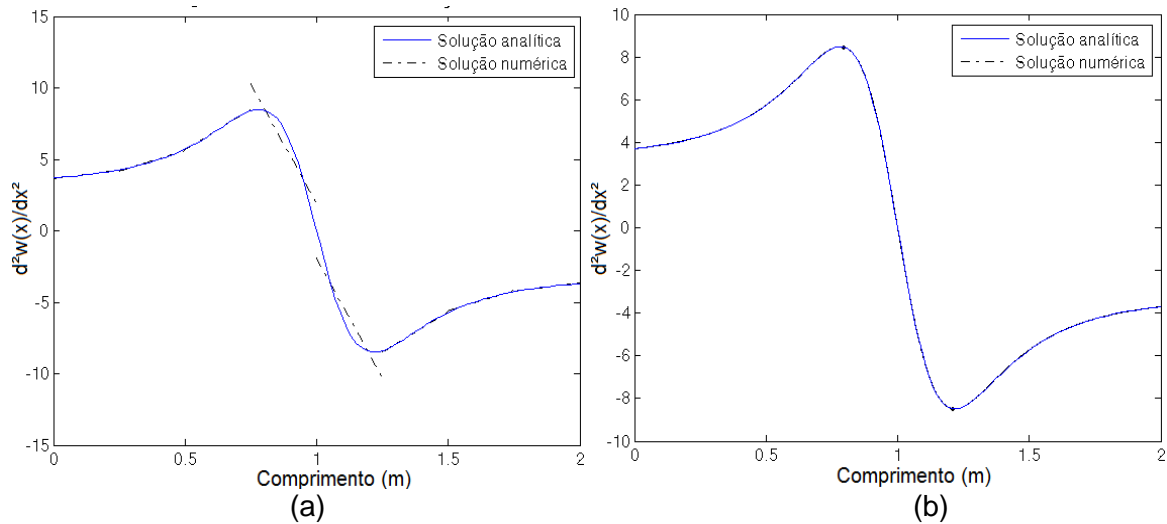


Figura 36 – Problema 4: Soluções adaptativas para função segunda derivada e estimador MNS. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.

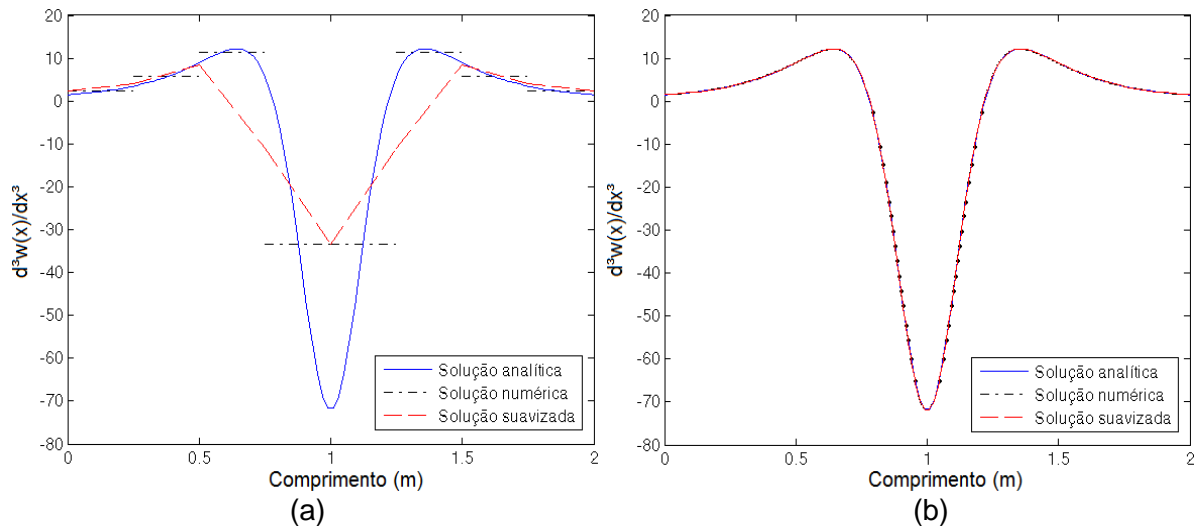


Figura 37 – Problema 4: Soluções adaptativas para função terceira derivada e estimador MNS. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.

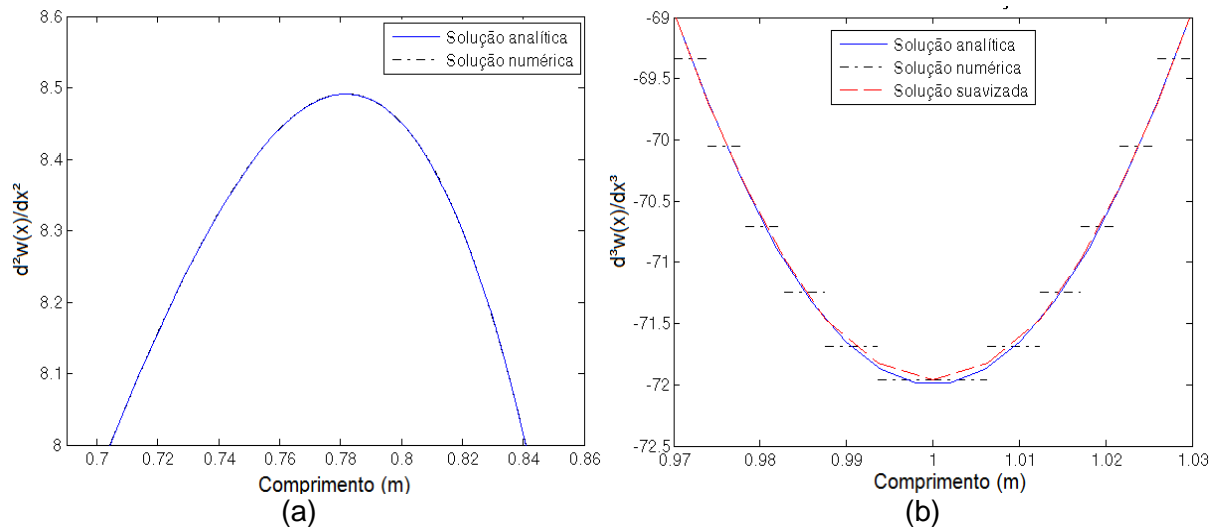


Figura 38 – Problema 4: Soluções adaptativas para Estimador MNS. (a) Função segunda derivada após convergência ampliada. (b) Função terceira derivada após convergência ampliada.



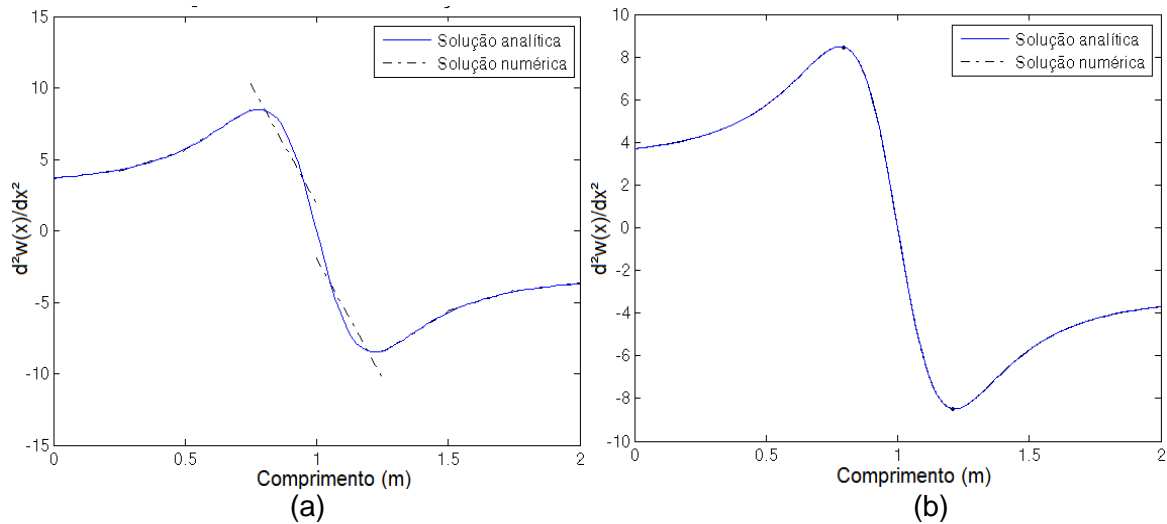


Figura 39 – Problema 4: Soluções adaptativas para função segunda derivada e estimador ZZ. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.

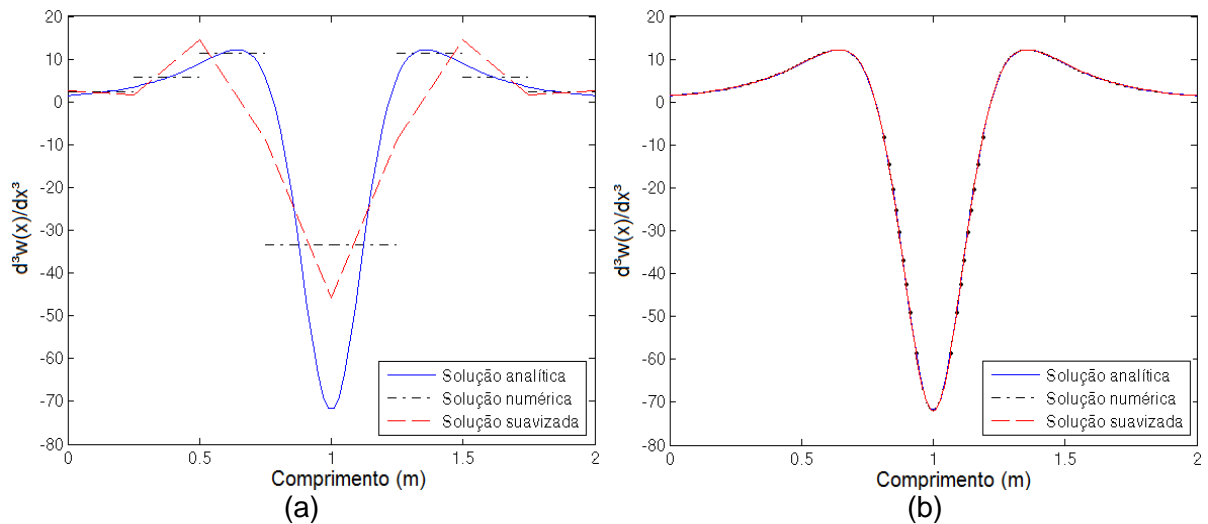


Figura 40 – Problema 4: Soluções adaptativas para função terceira derivada e estimador ZZ. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.

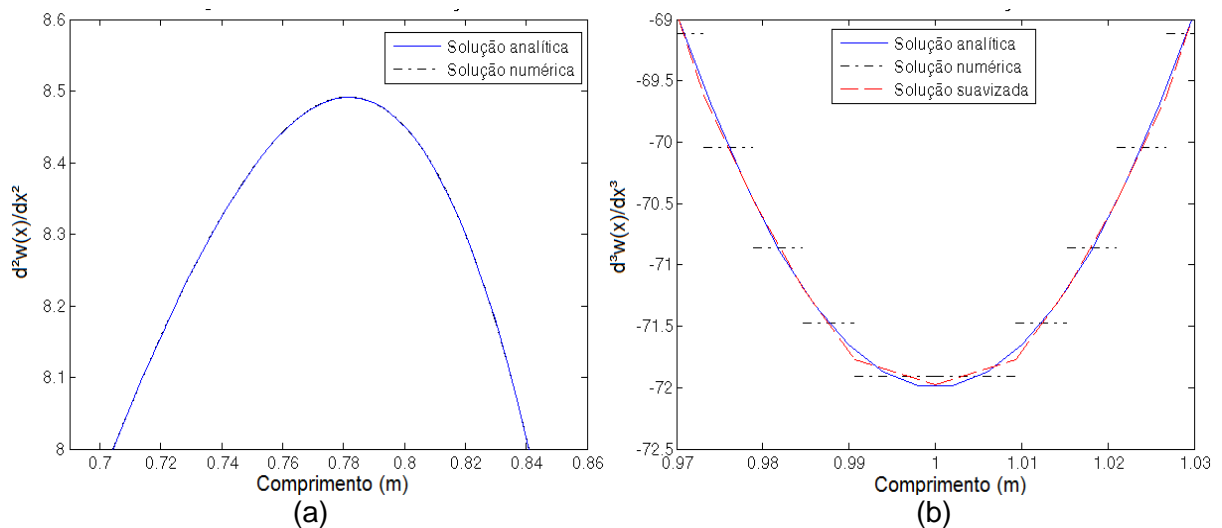


Figura 41 – Problema 4: Soluções adaptativas para Estimador ZZ. (a) Função segunda derivada após convergência ampliada. (b) Função terceira derivada após convergência ampliada.

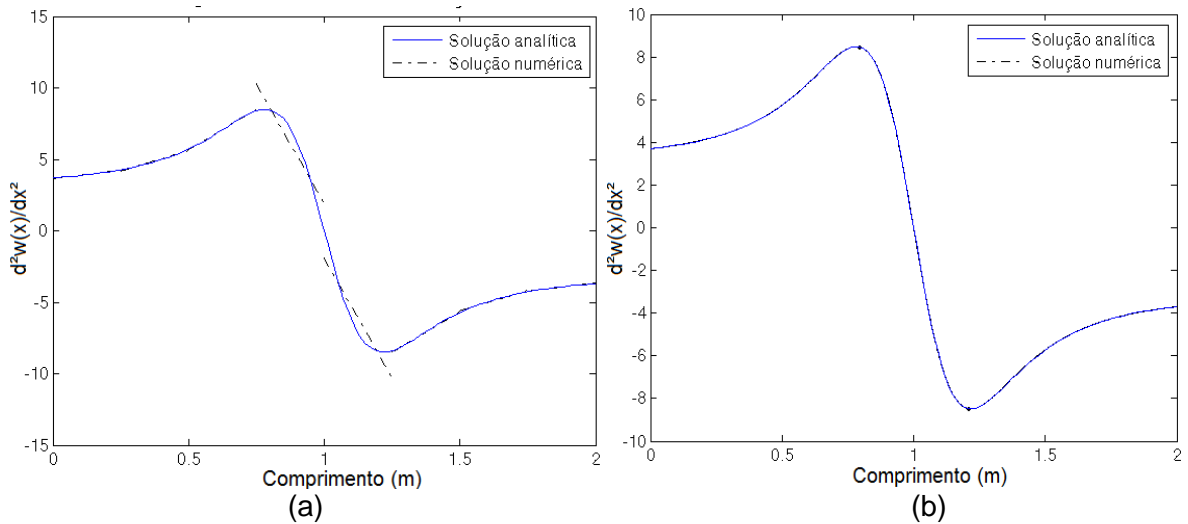


Figura 42 – Problema 4: Soluções adaptativas para função segunda derivada e estimador SPR. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.

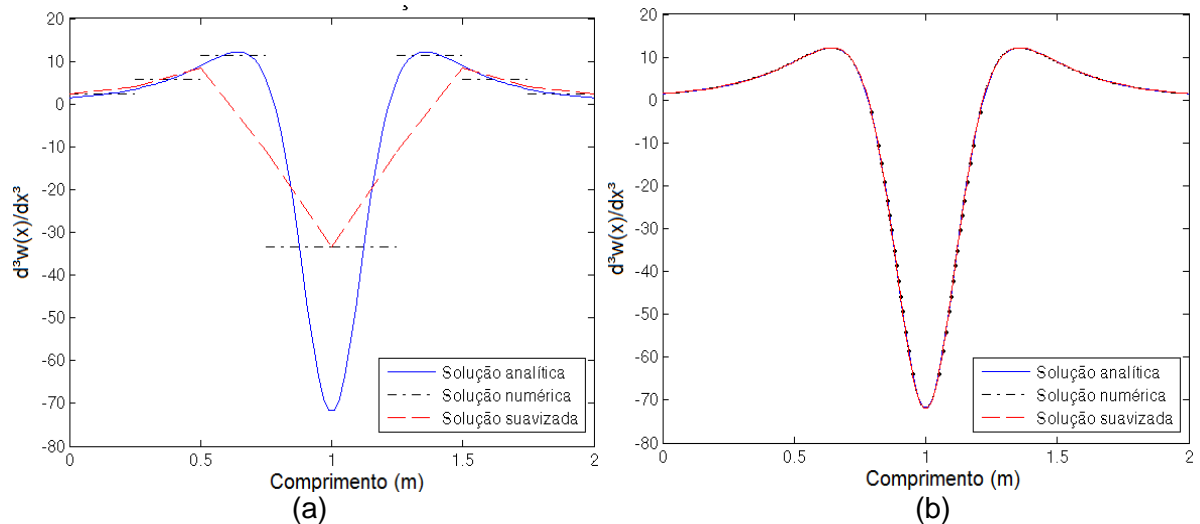


Figura 43 – Problema 4: Soluções adaptativas para função terceira derivada e estimador SPR. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.

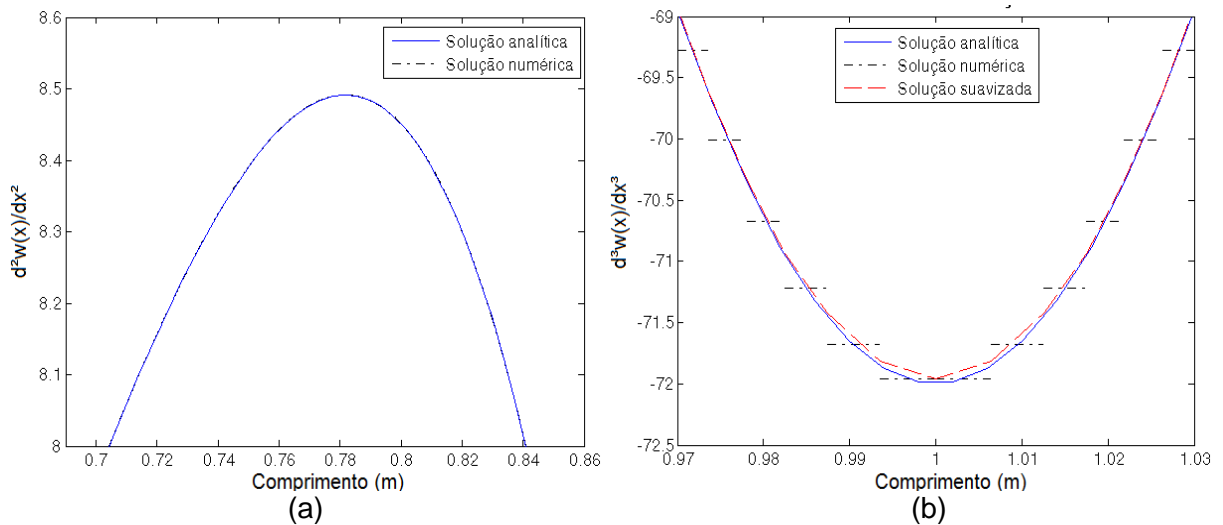


Figura 44 – Problema 4: Soluções adaptativas para Estimador SPR. (a) Função segunda derivada após convergência ampliada. (b) Função terceira derivada após convergência ampliada.

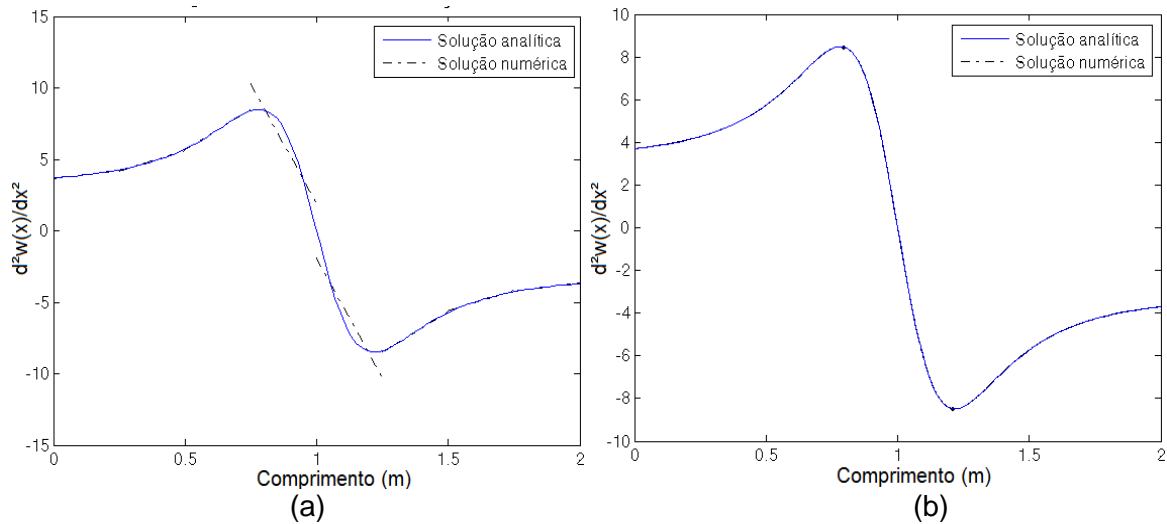


Figura 45 – Problema 4: Soluções adaptativas para função segunda derivada e estimador REP. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.

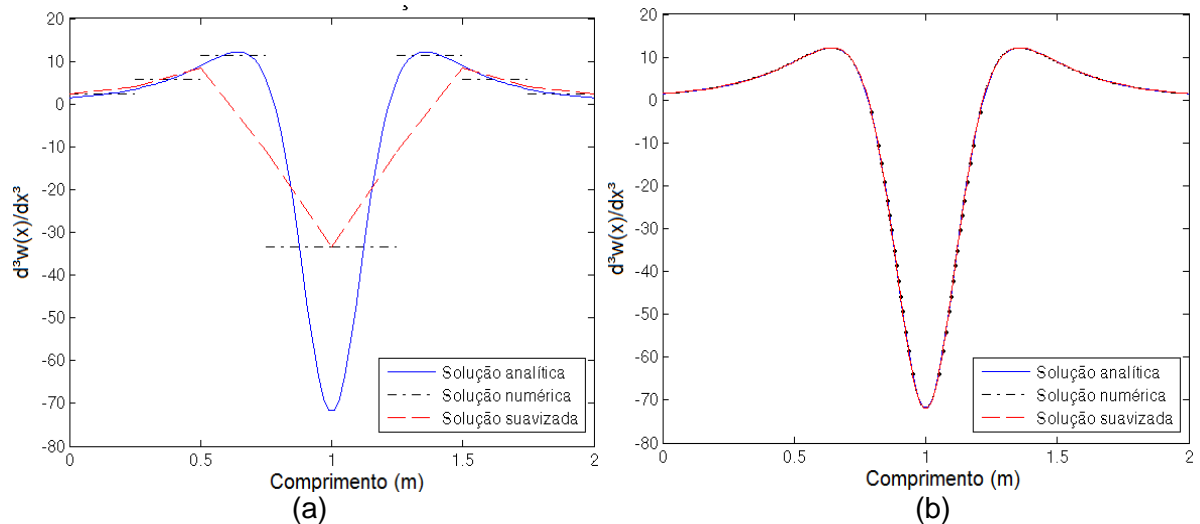


Figura 46 – Problema 4: Soluções adaptativas para função terceira derivada e estimador REP. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.

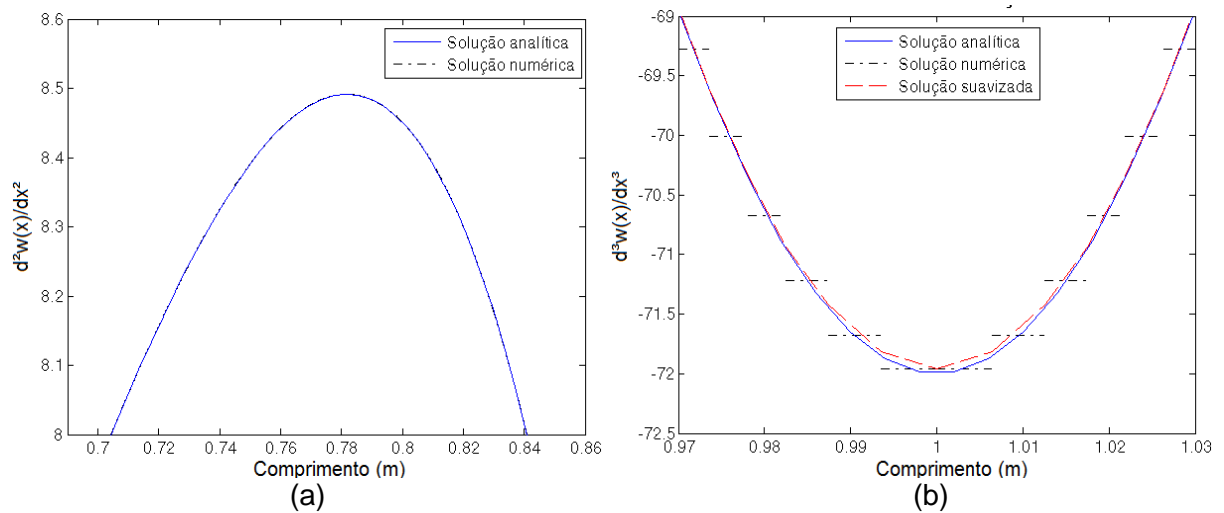


Figura 47 – Problema 4: Soluções adaptativas para Estimador REP. (a) Função segunda derivada após convergência ampliada. (b) Função terceira derivada após convergência ampliada.

Como esperado, todos os estimadores de erro mostram-se adequados quanto à condução de um processo  $h$ -adaptativo conduzido na terceira derivada da solução, levando a resultados que satisfazem o critério de convergência. Os estimadores MNS, SPR e REP possuem, para o corrente caso, resultados muito próximos e de precisão comparáveis, destacando-se o estimador ZZ, o qual expressa um índice de efetividade global e um desvio do índice de efetividade melhores do que os demais estimadores.

Além disso, o erro relativo percentual global em terceira derivada obtido pelos respectivos estimadores ( $\eta_3^*$ ), como constatado para malhas uniformes, é maior do que o erro relativo percentual global analítico em segunda derivada ( $\eta_2$ ) também para malhas não uniformes. Através das vistas ampliadas nas regiões de maiores variações da função terceira derivada, para os estimadores MNS, ZZ, SPR e REP, dadas por meio das Figuras 38, 41, 44 e 47 respectivamente, é possível observar que a recuperação da solução é adequada, decorrendo disso bons índices de efetividade mesmo para regiões críticas.

#### 4.9.2 Influência do critério de malha ótima

Com o objetivo de avaliar as características do processo  $h$ -adaptativo considerando diferentes critérios de malha ótima, são adotados os mesmos parâmetros iniciais anteriores (recuperação em terceira derivada) exceto o critério de malha ótima, o qual é modificado para o critério de equidistribuição do erro específico. Para tanto, somente o estimador ZZ é aplicado. Os resultados podem ser observados por meio da Tabela 26, onde as soluções adaptativas pós-convergência para ambos os critérios discutidos são comparados através da Figura 48.

Como constatado para os demais problemas já discutidos, a malha que o processo  $h$ -adaptativo conduz é dependente do critério de malha ótima empregado, sendo que o critério de malha ótima de densidade de erro gera malhas com um número de graus de liberdade superior ao critério de equidistribuição de erro e com um número maior de elementos concentrados em regiões de maior variação da função, como visualizado por meio da Figura 48.

Tabela 26 – Problema 4: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador ZZ, recuperação da terceira derivada e refino  $h$ -adaptativo.

Critério de malha ótima		Malha 1	Malha 2	Malha 3	Malha 4	Malha 5	Malha 6
Equidistribuição do erro específico	$\eta_3^*$	42,76%	9,45%	2,62%	1,54%	0,80%	0,52%
	$\theta$	0,6403	1,0051	0,9916	0,9822	0,9873	0,9881
	$NGL$	18	66	158	290	490	826
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	62,11	24,81	5,73	3,79	1,41	0,92
	$D_\theta$	3,10	0,18	0,25	0,18	0,16	0,09
	$\eta_2$	7,7973%	0,2226%	0,0401%	0,0185%	0,0097%	0,0055%
Equidistribuição do erro	$\eta_3^*$	42,76%	9,45%	2,86%	1,46%	0,83%	-
	$\theta$	0,6403	1,0051	0,9958	0,9906	0,9969	-
	$NGL$	18	66	150	274	458	-
	$\zeta_{ie,m\acute{a}x}$	62,11	20,45	4,16	2,73	1,14	-
	$D_\theta$	3,10	0,18	0,13	0,12	0,09	-
	$\eta_2$	7,7973%	0,2226%	0,0321%	0,0116%	0,0050%	-

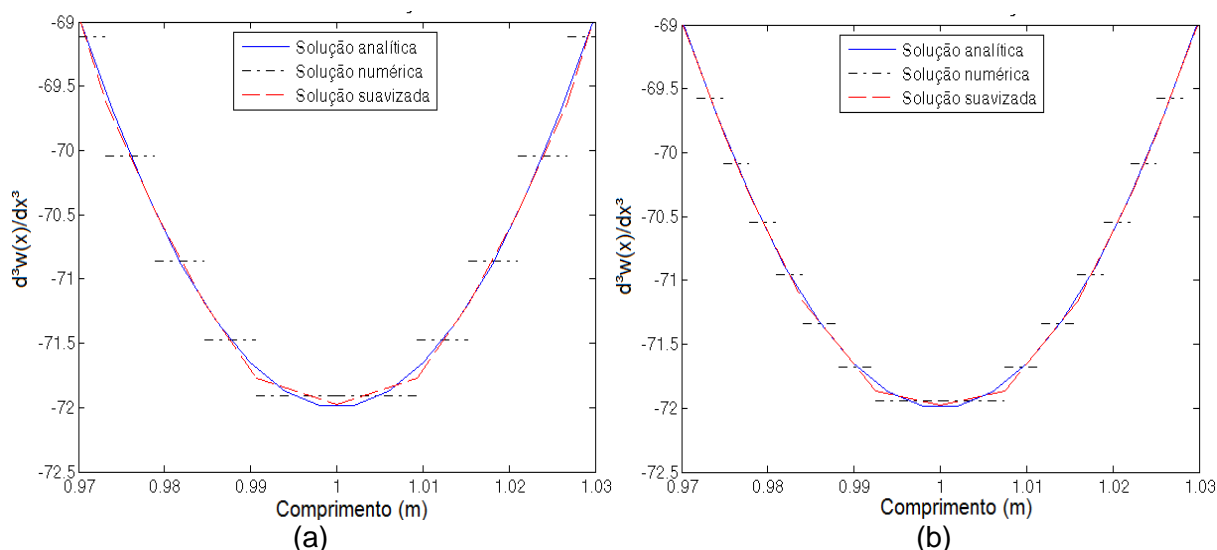


Figura 48 – Problema 4: Vista ampliada das soluções adaptativas para Estimador ZZ após convergência empregando recuperação em terceira derivada. (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico.

Por fim, os seguintes parâmetros são utilizados: recuperação na segunda derivada da solução, malha uniforme com oito elementos e erro relativo percentual admissível de 1%. Além disso, dois processos distintos são realizados, o primeiro empregando o critério de malha ótima de equidistribuição do erro e o segundo o critério de equidistribuição do erro específico. As soluções iniciais e soluções convergentes para segunda e terceira derivada para os estimadores de erro

baseados em padrões, SPR e REP, podem ser visualizadas da Figura 49 à Figura 55. Os resultados das iterações do processo adaptativo são demonstrados por meio da Tabela 27.

Tabela 27 – Problema 4: Comparação entre os critérios de malha ótima para o estimador SPR e REP, recuperação da segunda derivada e refino  $h$ -adaptativo.

Estimador		Malha 1	Malha 2	Malha 3
SPR / Critério de equidistribuição do erro	$\eta_2^*$	9,79%	0,90%	0,49%
	$\theta$	1,2574	1,0138	1,0065
	$NGL$	18	30	38
	$\zeta_{ie,máx}$	18,65	1,43	0,67
	$D_\theta$	5,43	0,34	0,21
	$\eta_3$	59,45%	18,62%	13,09%
REP / Critério de equidistribuição do erro	$\eta_2^*$	13,09%	0,62%	-
	$\theta$	1,6881	1,0968	-
	$NGL$	18	38	-
	$\zeta_{ie,máx}$	24,83	0,93	-
	$D_\theta$	7,89	0,49	-
	$\eta_3$	59,45%	14,91%	-
SPR / Critério de equidistribuição do erro específico	$\eta_2^*$	9,79%	0,90%	0,46%
	$\theta$	1,2574	1,0138	1,0113
	$NGL$	18	30	42
	$\zeta_{ie,máx}$	18,65	1,87	1,06
	$D_\theta$	5,43	0,34	0,30
	$\eta_3$	59,45%	18,62%	13,09%
REP / Critério de equidistribuição do erro específico	$\eta_2^*$	13,09%	0,62%	0,40%
	$\theta$	1,6881	1,0968	1,1121
	$NGL$	18	38	46
	$\zeta_{ie,máx}$	24,83	1,20	0,69
	$D_\theta$	7,89	0,49	1,38
	$\eta_3$	59,45%	14,91%	11,71%

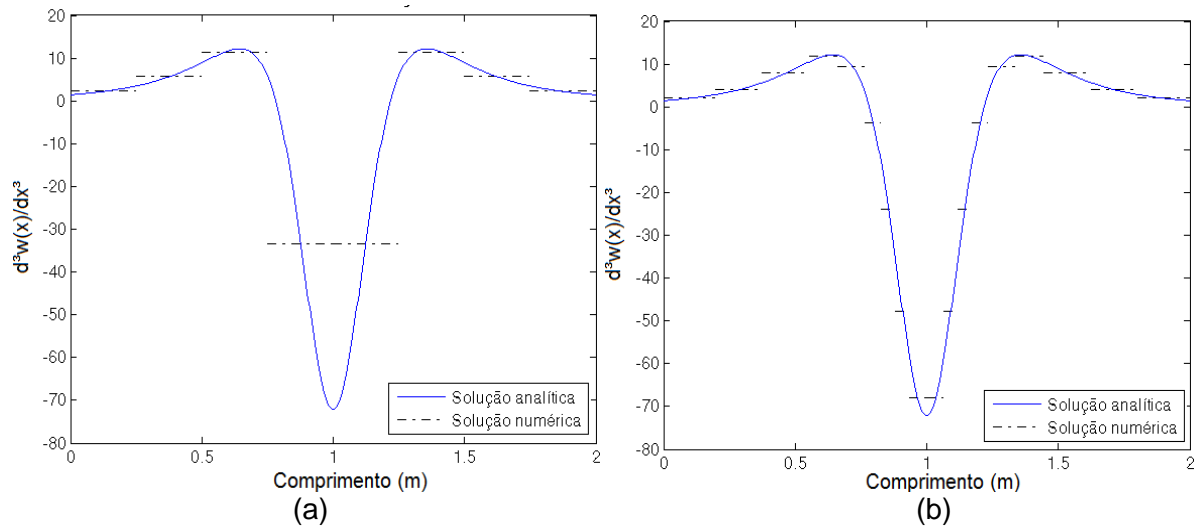


Figura 49 – Problema 4: Soluções adaptativas para função terceira derivada, estimador SPR e critério de equidistribuição do erro. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.

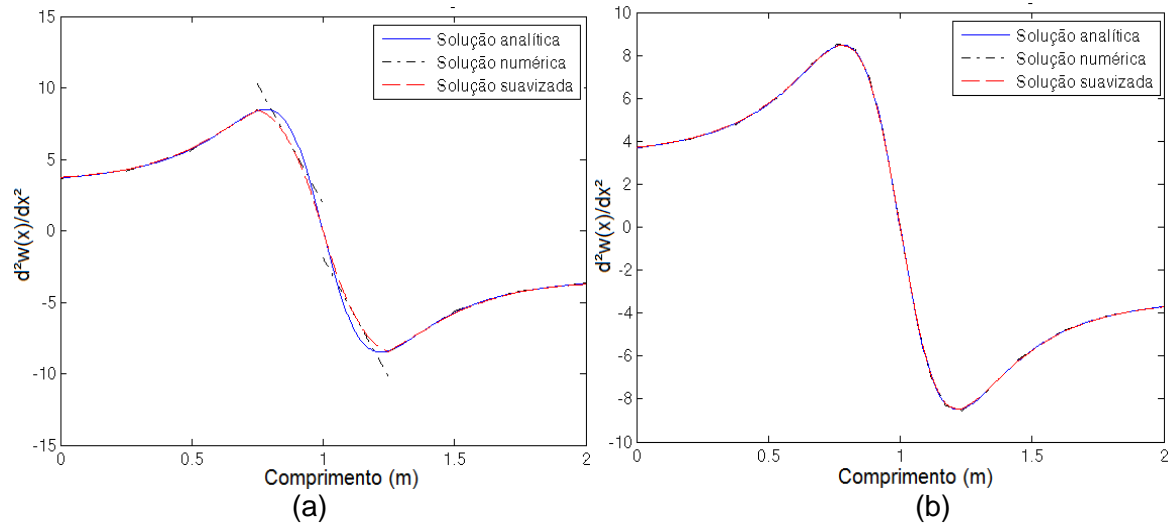


Figura 50 – Problema 4: Soluções adaptativas para função segunda derivada, estimador SPR e critério de equidistribuição do erro. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.

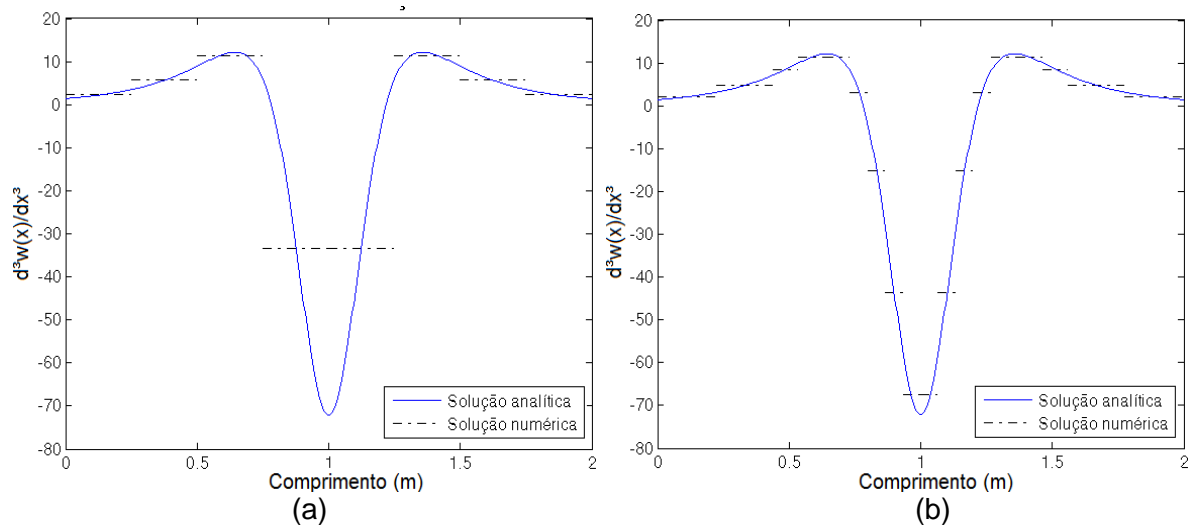


Figura 51 – Problema 4: Soluções adaptativas para função terceira derivada, estimador REP e critério de equidistribuição do erro. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.

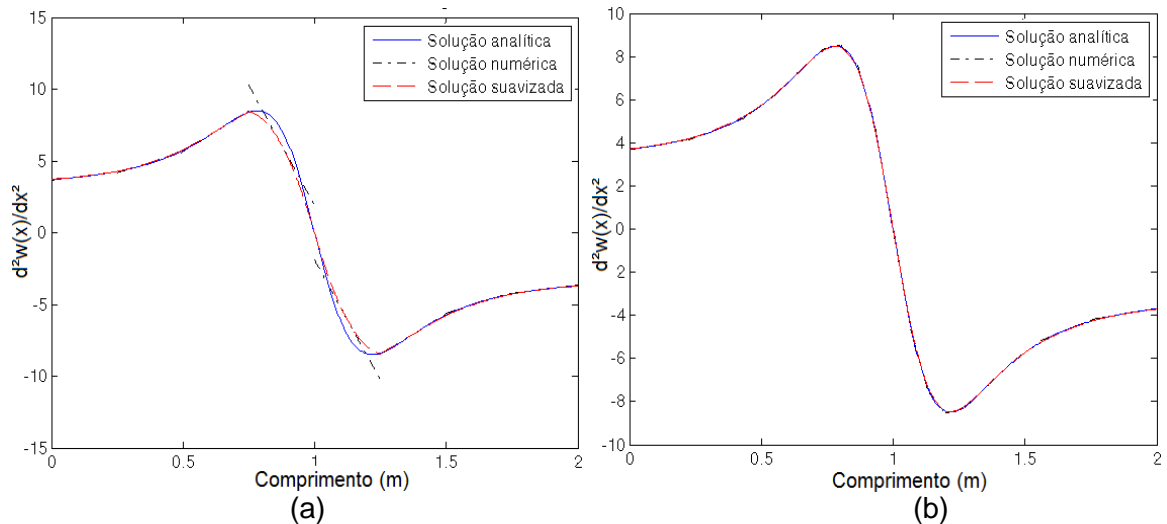


Figura 52 – Problema 4: Soluções adaptativas para função segunda derivada, estimador REP e critério de equidistribuição do erro. (a) Malha inicial. (b) Malha após convergência.

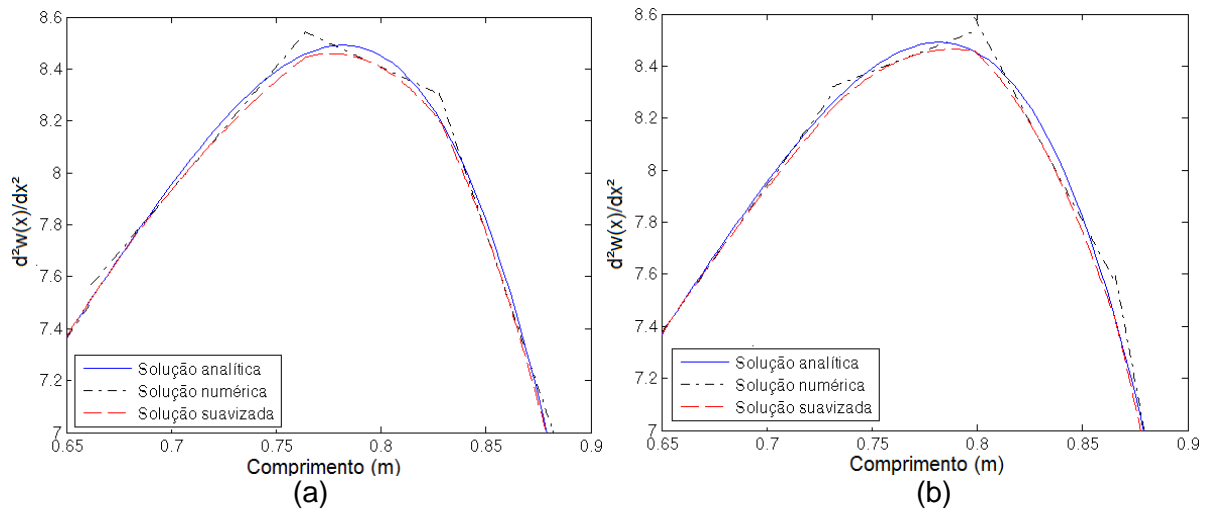


Figura 53 – Problema 4: Vista ampliada para soluções adaptativas da função segunda derivada após convergência e critério de equidistribuição do erro. (a) Estimador SPR. (b) Estimador REP.

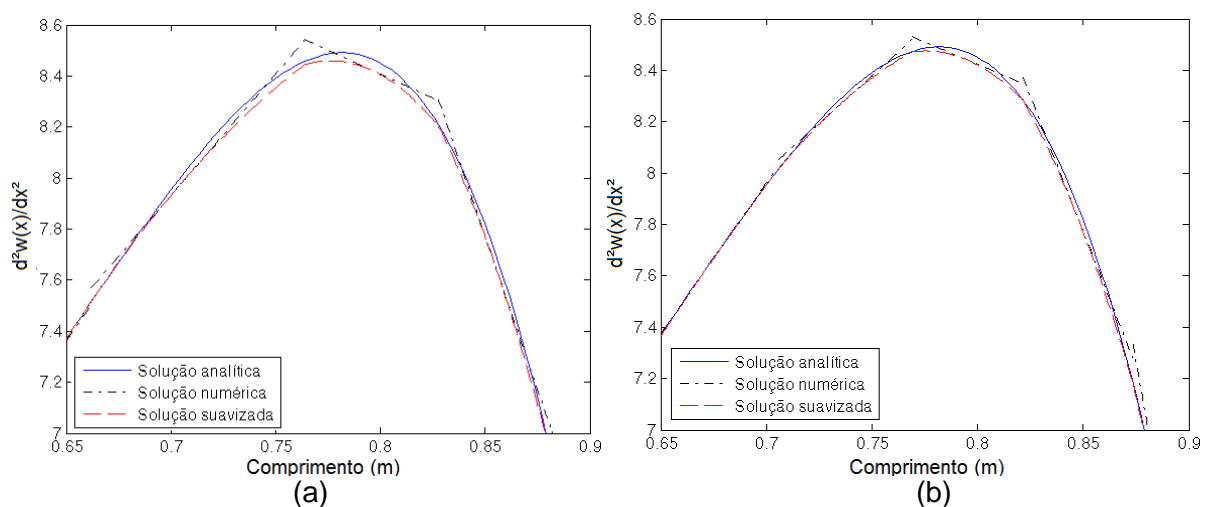


Figura 54 – Problema 4: Vista ampliada para soluções adaptativas da função segunda derivada após convergência e estimador SPR. (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico.



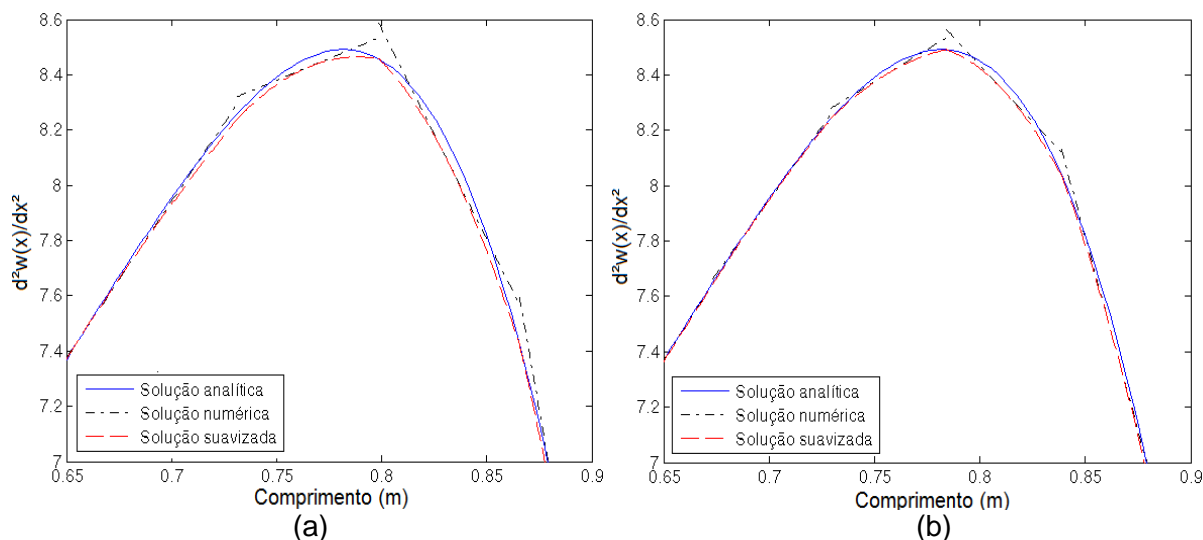


Figura 55 – Problema 4: Vista ampliada para soluções adaptativas da função segunda derivada após convergência e estimador REP. (a) Critério de equidistribuição do erro. (b) Critério de equidistribuição do erro específico.

No corrente problema, não são aplicados os estimadores MNS e ZZ para a abordagem baseada na segunda derivada da solução, pois, conforme demonstrado na seção 4.8, estes estimadores não apresentam bons índices de efetividade quando a recuperação de uma solução quadrática é necessária.

Como se pode observar pela Tabela 27 e Figura 53 (vista ampliada para soluções adaptativas com recuperação na segunda derivada e critério de equidistribuição do erro), ambos os estimadores de erro são eficientes na condução do processo adaptativo, pois, claramente possuem a solução recuperada convergindo a uma taxa maior do que a solução de elementos finitos.

Além disso, por meio das Figuras 54 e 55, utilizando os estimadores SPR e REP, respectivamente, tem-se uma vista ampliada das soluções adaptativas convergentes para o critério de malha ótima de equidistribuição do erro e critério de equidistribuição do erro específico. Percebe-se com o auxílio da Tabela 27, que este último critério, independente do estimador empregado, leva a uma malha com um número maior de graus de liberdade do que o segundo critério. Porém, com uma discrepância menor em relação a diferença do número de graus de liberdade do que a apresentada nos problemas anteriores. Isso acontece devido à malha inicial possuir um erro não tão distante do erro percentual admissível e ambos os critérios conduzirem ao mesmo refino para a primeira iteração do processo adaptativo (malha 2) uma vez que possuem uma malha uniforme com o mesmo número de elementos.

Em sincronia com o encontrado pela análise em terceira derivada da solução, quando uma solução convergente pela abordagem em segunda derivada é obtida, o erro relativo percentual analítico em terceira derivada  $\eta_3$  é superior ao encontrado em segunda derivada, comprovando que os erros dominantes estão presentes na derivada de ordem superior.

Com isso, caso o erro em terceira derivada, ou seja, o erro medido no esforço cortante a menos de uma constante, seja desprezado, recomenda-se a utilização da adaptatividade na segunda derivada da solução, uma vez que para o mesmo erro relativo percentual admissível conduz a uma malha adaptada com uma redução considerável do número de graus de liberdade. Para isso deve-se utilizar um estimador baseados em padrões, como o REP ou SPR. Em casos onde o esforço cortante começa a representar parcelas representativas na energia do sistema, a recuperação em terceira derivada da solução torna-se interessante, uma vez que garante um erro menor do que o admissível, além de possuir um erro várias ordens de grandeza abaixo para a segunda derivada da solução. Nesse caso, qualquer um dos estimadores aqui discutidos mostra-se apto a guiar o processo  $h$ -adaptativo, destacando-se o menor custo computacional representado pelo estimador MNS.

## 5 CONCLUSÃO

### 5.1 INTRODUÇÃO

Inicialmente, frisa-se aqui o fato de o MEF ser um método numérico de aproximação, o qual, intrinsecamente, possui associado a ele erros, quais sejam, erros de aproximação de domínio, erros de aproximação, e erros de aritmética finita e quadratura. Dessa maneira, estudos que levem a estimativas precisas desses erros ao longo do domínio, juntamente com técnicas adaptativas, são essenciais para a efetiva utilização do MEF.

Contudo, geralmente os trabalhos discutem somente a convergência global do processo  $h$ -adaptativo, sendo que informações a níveis elementares não são consideradas. Assim, além de medidas globais referentes à qualidade dos diversos estimadores de erro e a convergência do processo  $h$ -adaptativo, o corrente trabalho apresenta um estudo comparativo entre vários estimadores de erro *a posteriori*: MNS, ZZ, SPR e REP, a níveis elementares. Portanto, medidas mais precisas da qualidade desses estimadores e das malhas adaptadas foram obtidas. Para isso, vários problemas lineares de engenharia unidimensionais e bidimensionais, empregando diferentes operadores diferenciais, são analisados: problema unidimensional de barra (equação diferencial ordinária de 2ª ordem), problema de viga fina de Euler-Bernoulli (equação diferencial ordinária de 4ª ordem), problema escalar bidimensional de condução térmica (equação diferencial parcial de 2ª ordem) e problema vetorial de elasticidade plana (equação diferencial parcial de 2ª ordem).

Cada problema proposto foi separado em duas seções. A primeira apresentou o desempenho dos vários estimadores de erro quando submetidos a sucessivos refinamentos uniformes, possibilitando, assim, a obtenção das taxas de convergência do erro e levantamento de outras características desejáveis em estimadores de erro. A segunda seção discutiu e comparou as características e eficiência em níveis global e elementar dos diversos estimadores de erro como guias do processo  $h$ -adaptativo, utilizando diferentes critérios de malha ótima.

## 5.2 CONCLUSÕES

### 5.2.1 Análise dos estimadores de erro como guia de um processo $h$ -adaptativo

Como demonstrado, para os problemas bidimensionais e para o problema unidimensional de barra empregando interpolações lineares e para o problema de viga fina de Euler-Bernoulli utilizando elemento de dois nós com interpolação cúbica e recuperação em terceira derivada, os estimadores SPR e REP são totalmente idênticos para malhas uniformes e não uniformes. Assim, quando aplicados como guias de um processo  $h$ -adaptativo com os mesmos critérios de convergência e malha ótima, conduzem a uma malha adaptada idêntica. Além disso, para essa mesma classe de problemas e elementos, o estimador MNS mostra resultados próximos dos demais estimadores, destacando-se principalmente pelo seu reduzido custo computacional e simplicidade de implementação.

Por outro lado, ao serem aplicadas interpolações quadráticas ao problema unidimensional de barra e aos problemas bidimensionais e realizar a recuperação em segunda derivada para o problema de viga, somente os estimadores de erro baseados em padrões, SPR e REP, apresentaram resultados satisfatórios e com precisões próximas.

Nota-se ainda que uma nova medida em relação à qualidade dos estimadores foi discutida, esta, denominada de desvio do índice de efetividade ( $D_\theta$ ), a qual representa o quanto os índices de efetividades elementares estão distantes do ideal, ou seja, da unidade. Este parâmetro busca analisar se a medida do erro realizada pelo estimador não se afasta de maneira significativa da unidade para nenhum dos elementos da malha. Caso isso ocorra, altos desvios do índice de efetividade são obtidos, uma vez que a diferença do índice de efetividade elementar da unidade é elevada ao quadrado. Consequentemente, o processo adaptativo subsequente poderá ser comprometido, gerando elementos com tamanhos desproporcionais ao que, na realidade, deveriam apresentar. Ou seja, faria com que, independente do critério de malha ótima adotado, a malha se afastasse da esperada.

### 5.2.2 Influência do critério de malha ótima

Com relação aos critérios de malha ótima, todas as combinações de classes de problemas e tipos de elementos, quando comparadas, mostram que o critério de equidistribuição do erro específico elementar apresenta uma malha adaptada com um número de elementos superior à malha adaptada seguindo o critério de equidistribuição do erro elementar, sendo que esses elementos alocam-se preferencialmente em regiões de maiores gradientes.

Além disso, para problemas unidimensionais, a convergência global ( $\eta \leq \bar{\eta}$ ) e local é satisfeita ( $\zeta_{ie,m\acute{a}x} \leq 1,2$ ), independente do critério de malha ótima empregado. Porém, para problemas planos, em geral, a convergência global é satisfeita em no máximo duas iterações pelo processo  $h$ -adaptativo, enquanto que a convergência local, mesmo que muito próxima de ser satisfeita, não é alcançada. Este fato pode decorrer de uma série de fatores, como, por exemplo, influência do gerador de malha ou cálculo do erro em algum elemento estar muito impreciso (índice de efetividade local muito abaixo da unidade), este último influenciando diretamente o tamanho do elemento correspondente e afetando uma região localizada em torno desse elemento. Esses fatores não são objetos de estudo deste trabalho.

Neste caso, além das medidas globais, geralmente utilizadas por alguns autores, adotam-se como medida da qualidade da malha adaptada dois parâmetros, denominados de média simples dos valores do parâmetro de erro local elementar ( $\bar{\zeta}_{ie,med}$ ) e desvio do parâmetro de erro local elementar ( $D_{\zeta_{ie}}$ ). Este último tem a mesma importância e equivale à medida  $D_{\theta}$ , aplicada aos índices de efetividades elementares gerados pelos estimadores de erro. Porém, neste caso, esta medida é aplicada aos parâmetros de erro local elementar. Da mesma forma, a média simples dos valores dos parâmetros de erro local elementar auxilia na determinação de quão próxima a malha adaptada encontra-se da malha ótima ( $\bar{\zeta}_{ie,med} = 1$ ).

Outra propriedade destacável desse processo é que os critérios de convergência são alcançados não somente pelo refino da malha, mas permite também seu desrefino. Esta característica geralmente resulta em um menor custo computacional necessário para que a solução desejável seja obtida.

### 5.3 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Não obstante o corrente trabalho ter atingido os objetivos propostos, determinados aspectos podem ser aperfeiçoados e, para tanto, seguem algumas sugestões para trabalhos futuros:

- I. Emprego de estimativas de erro e processos adaptativos anisotrópicos, os quais levam em consideração diferentes fatores dos analisados pelos estimadores aqui expostos, como, por exemplo, parâmetros direcionais do erro.
- II. Adaptação da estrutura computacional corrente, empregando diferentes geradores de malha e verificando, com isso, a influência do gerador de malha no processo  $h$ -adaptativo de problemas planos.
- III. Ampliação da análise a nível elementar e dos diferentes estimadores apresentados, para um maior número de problemas comumente discutidos em engenharia, como, por exemplo, flexão de placas (operador diferencial de 4ª ordem no domínio bidimensional), plasticidade, mecânica do dano e remodelação óssea.
- IV. Aplicação da análise a nível elementar para outros estimadores de erro discutidos na literatura, como, por exemplo, o estimador RCP, PPR e SCR.

## REFERÊNCIAS

AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. **A posteriori error estimation in finite element analysis**. 1. ed. New York: John Wiley and Sons, 2000.

AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods. **Numerische Mathematik**, v. 65, p. 23–50, 1993a.

AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. A posteriori error estimators for second order elliptic systems: Part 1. Theoretical foundations and a posteriori error analysis. **Computers and mathematics with applications**, v. 25, p. 101–113, 1993b.

AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. A posteriori error estimators for second order elliptic systems: Part 2. An optimal order process for calculating self-equilibrating fluxes. **Computers and mathematics with applications**, v. 26, p. 75–87, 1993c.

AKIN, J. E. **Finite Element Analysis with Error Estimators: An Introduction to the FEM and Adaptive Error Analysis for Engineering Students**. 1. ed. Oxford: Elsevier: Butterworth Heinemann, 2005.

BABUSKA, I. The adaptive methods and error estimation for elliptic problems of structural mechanics. **Proc. AR0 Workshop on Adaptive Methods for Partial Differential Equations**, University of Maryland, College Park, 14-16 February 1983.

BABUSKA, I.; STROUBOULIS, T.; UPADHYAY, C. S. A model study of the quality of a posteriori error estimators for finite element solutions of linear elliptic problems, with particular reference to the behavior near the boundary. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 2521–2577, 1997.

BABUSKA, I.; DORR, M. R. Error estimates for the combined h and p version of the finite element method. **Numerische Mathematik**, v. 37, p. 257–277, 1981.

BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. A posteriori error analysis of finite element solutions for one-dimensional problems. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 18, p. 565–589, 1981.

BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. Error estimates for adaptive finite element computations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 15, p. 736–754, 1978.

BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. Reliable error estimation and mesh adaptation for the finite element method. **Computational Methods in Nonlinear Mechanic**, p. 67–109, 1980.

BARLOW, J. Optimal stress locations in finite element models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 10, p. 243–251, 1976.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: An Introduction**. 1. ed. Texas: Prentice - Hall, 1981.

BENEDETTI, A.; de MIRANDA, S.; UBERTINI, F. A posteriori error estimation based on the super convergent recovery by compatibility in patches. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 67, p. 108–131, 2006.

BI, C.; GINTING, V. Global superconvergence and a posteriori error estimates of the finite element method for second-order quasilinear elliptic problems. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 260, p. 78 - 90, 2014.

BOIS, R.; FORTIN, M.; FORTIN, A. A fully optimal anisotropic mesh adaptation method based on a hierarchical error estimator. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 12, p. 209 - 212, 2012.

BOROOMAND, B.; ZIENKIEWICZ, O. C. Recovery by equilibrium patches. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 137–154, 1997a.

BOROOMAND, B.; ZIENKIEWICZ, O. C. An improved REP recovery and the effectivity robustness test. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 3247–3277, 1997b.

BOROOMAND, B.; GHAFARIAN, M.; ZIENKIEWICZ, O. C. On application of two superconvergent recovery procedures to plate problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 61, p. 1644–1673, 2004.

BOROOMAND, B.; MOSSAIBY, F. Generalization of robustness test procedure for error estimators. Part I: formulation for patches near kinked boundaries. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 64, p. 427–460, 2005a.

BOROOMAND, B.; MOSSAIBY, F. Generalization of robustness test procedure for error estimators. Part II: test results for error estimators using SPR and REP. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 64, p. 461–502, 2005b.

BRANDÃO, D. N. **Um Refinamento H-Adaptativo de Malhas Para o Método dos Elementos Finitos Utilizando uma Estrutura de Grafo**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal Fluminense, 2008.

BUGEDA, G. **Utilización de Técnicas de Estimación de Error y Generación Automática de Malhas em Processos de Optimización Estructural**. Tese (Doutorado) – Universitat Polytécnica de Catalunya, 1990.

CAO, W. An interpolation error estimate on anisotropic meshes in  $R^n$  and optimal metrics for mesh refinement. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v 45, n. 6, p. 2368 - 2391, 2007.

CAO, W. On the superconvergence patch recovery techniques for the linear finite element approximation on anisotropic meshes. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 265, p. 33 – 51, 2014.



CASTELLAZZI, G. **Verification in Computational Structural Mechanics: Recovery-Based a Posteriori Error Estimation**. Tese (Doutorado) – University of Bologna, 2007.

CASTELLAZZI, G.; de MIRANDA, S.; UBERTINI, F. Adaptivity based on the recovery by compatibility in patches. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, p. 379–390, 2010.

CASTELLAZZI, G.; de MIRANDA, S.; UBERTINI, F. Patch based stress recovery for plate structures. **Computer Mechanics**, v. 47, p. 379–394, 2011.

CIARLET, P. G. **The Finite Element Method for Elliptic Problems**. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2002.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. USA: 1. ed. John Wiley and Sons, 2002.

COOREVITS, P.; BELLENGER, E. Alternative mesh optimality criteria for h-adaptive finite element method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 40, p. 1195–1215, 2004.

CRAIG, A. W.; AINSWORTH, M.; ZHU, J. Z.; ZIENKIEWICZ, O. C. H and HP version error estimation and adaptive procedures from theory to practice. **Engineering with Computers**, v. 5, p. 221 – 234, 1989.

DUARTE, H. **Estimador de Erro para a Formulação p do Método de Elementos Finitos Aplicado ao Problema Fluido-Estrutura**. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, 2003.

FANCELLO, E. A.; FEIJÓO, R. A. Adapte: estimador de erro para problemas planos em elasticidade linear. In: **MECÂNICA COMPUTACIONAL**, v. 13, Bariloche, Argentina, 1992.

FANCELLO, E. A.; GUIMARÃES, A. C.; FEIJÓO, R. Aranha – Gerador de malhas 2d para elementos finitos triangulares de 3 e 6 nós. In: **ANAIS DO XI CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO EM MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA**, v. 2, p. 983-996, Brasil, 1990.

FLAHERTY, J. E. **Finite Element Analysis**. Lecture Notes – Rensselaer Polytechnic Institute. Troy, New York, Springer, 2000.

FORMAGGIA, L.; PEROTTO, S. New anisotropic a priori error estimates. **Numerische Mathematik**, v. 94, p. 67 – 92, 2003.

GRÄTSCH, T.; BATHE, J. K. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. **Computers and Structures**, v. 83, p. 235–265, 2005.

HORVÁTH, T. L.; IZSÁK, F. Implicit a posteriori error estimation using patch recovery techniques. **Central European Journal of Mathematics**, v. 10, p. 55–72, 2012.

HU, J.; JIANG, L.; SHI, Z. New a posteriori error estimate and quasi-optimal convergence of the adaptive nonconforming Wilson element. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 265, p. 173–186, 2014.

HUANG, Y.; YI, N. The Superconvergent Cluster Recovery Method. **Journal of Scientific Computing**, v. 44, p. 301–322, 2010.

HUANG, W.; KAMENSKI, L.; LANG, J. A new anisotropic mesh adaptation method based upon hierarchical a posteriori error estimates. **Journal of Computational Physics**, v. 229, p. 2179–2198, 2010.

JOHNSON, C.; HANSBO, P. Adaptive finite element methods in computational mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 101, p. 143–181, 1992.

KATILI, I.; HAMDOUNI, A.; MILLET, O.; RASTANDI, J. I.; MAKNUM, I. J. A Comparative study of Stress Recovery Method and error estimation of plate bending problem using DKMQ element. **Modern Mechanical Engineering**, v. 2, p. 47 – 55, 2012.

KHENNANE, A. **Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and Abaqus**. Boca Raton: 1. ed. CRC Press: Taylor e Francis Group, 2013.

KOROTOV, S. Global a posteriori error estimates for convection–reaction–diffusion problems. **Applied Mathematical Modelling**, v. 32, p. 1579–1586, 2008.

LAKKIS, O.; PRYER, T. Gradient recovery in adaptive finite-element methods for parabolic problems. **IMA Journal of Numerical Analysis**, v. 32, p. 246–278, 2012.

LEE, T.; PARK, H. C.; LEE, S. W. A superconvergent stress recovery technique with equilibrium constraint. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 1139–1160, 1997.

LI, J.; LIN, Y. A priori and posteriori error analysis for time-dependent Maxwell's equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2014. Aceito para publicação.

LI, X. D. **Adaptive Finite Element Procedures in Structural Dynamics**. Tese (Doutorado) – Chalmers University of Technology, Suécia, 1996.

LINS, R. M. **Estimador de Erro a Posteriori Baseado em Recuperação do Gradiente para o Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) –Escola de Engenharia de São Carlos – Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo, 2011.

LIU, G. R. **Mesh Free Methods – Moving Beyond the Finite Element Method**. 1. ed. CRC Press, 2003.

LO, S. H.; LEE, C. K. On using different recovery procedures for the construction of smoothed stress in finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 43, p. 1223–1252, 1998.

NADAL, E.; ALMEIDA, M.; RÓDENAS, J. J.; FUENMAYOR, F. J.; GONZÁLEZ-ESTRADA, O. A. Application of a fully equilibrated superconvergent patch recovery scheme for error bounding. In: VI INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADAPTIVE MODELING AND SIMULATION, Lisboa, Portugal, 2013.

NAGA, A; ZHANG, Z. A posteriori error estimates based on the polynomial preserving recovery. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 42, p. 1780–1800, 2004.

NOVOTNY, A. A.; FANCELLO, E. A. Um refinamento h, p e hp adaptativo na análise de flexão de placas semi-espessas. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 14, p. 25–48, 1998.

NOVOTNY, A. A.; PEREIRA, J. T.; FANCELLO, E. A.; BARCELLOS, C. S. A fast hp adaptive finite element mesh design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 133–148, 2000.

ODEN, J. T.; REDDY, J. N. **An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements**. New York: Dover, 2011.

OH, H.; BATRA, R. C. Application of Zienkiewicz—Zhu's error estimate with superconvergent patch recovery to hierarchical p-refinement. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 31, p. 273–280, 1999.

ONÑATE, E.; BUGEDA, G. A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis. **Engineering Computations**, v. 10, p. 307–321, 1993.

PAYEN, D. J.; BATHE, K-J. The use of nodal point forces to improve element stresses. **Computers and Structures**, v. 89, p. 485 - 495, 2011a.

PAYEN, D. J.; BATHE, K-J. Improved stresses for the 4-node tetrahedral element. **Computers and Structures**, v. 89, p. 1265 - 1273, 2011b.

PAYEN, D. J.; BATHE, K-J. A stress improvement procedure. **Computers and Structures**, v. 112-113, p. 311 - 326, 2012.

PICASSO, M. An anisotropic error indicator based on Zienkiewicz—Zhu error estimator: application to elliptic and parabolic problems. **SIAM- Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 24, p. 1328 - 1355, 2003.

PICASSO, M. Adaptive finite elements with large aspect ratio based on an anisotropic error estimator involving first order derivatives. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 14 - 23, 2006.

PRUDHOMME, S.; ODEN, J. T.; WESTERMANN, T.; BASS, J.; BOTKIN, E. Practical methods for a posteriori error estimation in engineering applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 56, p. 1193–1224, 2003.

RAJENDRAN, S.; LIEW, K. M. Optimal stress sampling points of plane triangular elements for patch recovery of nodal stresses. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 58, p. 579–607, 2003.

RAMM, E.; MAUTE, K.; SCHWARZ, S. Adaptive topology and shape optimization. **Computational Mechanics – New Trends and Applications**, Barcelona, Espanha, 1998.

REDDY, B. D. **Functional Analysis and Boundary-Value Problems: an Introductory Treatment**. New York: John Wiley & Sons, 1986.

REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. New York: 3. ed. Mc Graw Hill, 2006.

SEGETH, K. A review of some a posteriori error estimates for adaptive finite element methods. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 80, p. 1589–1600, 2010.

STEWART, J. R.; HUGHES, T. J. R. An a posteriori error estimator and hp-adaptive strategy for finite element discretizations of the Helmholtz equation in exterior domains. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 25, p. 1–26, 1997.

STEWART, J.R.; HUGHES, T.J.R. A tutorial in elementary finite element error analysis: A systematic presentation of a priori and a posteriori error estimates. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 158, p. 1–22, 1998.

UBERTINI, F. Patch recovery based on complementary energy. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, p. 1501–1538, 2004.

VALLET, M. G.; MANOLE, C. M.; DOMPIERRE, J.; DUFOUR, S.; GUIBAULT, F. Numerical comparison of some Hessian recovery techniques. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 72, p. 987–1007, 2007.

WIBERG, N. – E.; ABDULWAHAB, F. An efficient postprocessing technique for stress problems based on superconvergent derivatives and equilibrium. **Numerical Methods in Engineering**, p. 25–32, 1992.

WIBERG, N. – E.; ABDULWAHAB, F.; ZIUKAS, S. Enhanced superconvergent patch recovery incorporating equilibrium and boundary conditions. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, p. 3417–3440, 1994.

WIBERG, N. – E.; ABDULWAHAB, F.. Error Estimation with postprocessed finite element solutions. **Computers & Structures**, v. 64, p. 113–137, 1997.

WIBERG, N. – E.; ABDULWAHAB, F. Patch recovery based on superconvergent derivatives and equilibrium. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, p. 2703–2724, 1993.

WIBERG, N. – E.; LI, X. D. A postprocessed error estimate and an adaptive procedure for the semidiscrete finite element method in dynamic analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, p. 3585–3603, 1994.

XIE H.; YIN, X. New metric tensors for anisotropic mesh generation. **LSEC, ICMSEC, Academy of Mathematics and Systems Science, CAS**. Beijing, 2 junho 2011. Disponível em: [http://www.researchgate.net/publication/51893165\\_New\\_metric\\_tensors\\_for\\_anisotropic\\_mesh\\_generation](http://www.researchgate.net/publication/51893165_New_metric_tensors_for_anisotropic_mesh_generation). Acesso em: 08/03/2014.

XU, J.; ZHANG, Z. Analysis of recovery type a posteriori error estimators for mildly structured grids. **Mathematics of Computation**, v. 73, p. 1139–1152, 2003.

YAN, N.; ZHOU, A. Gradient recovery type a posteriori error estimates for finite element approximations on irregular meshes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 4289–4299, 2001.

ZHANG, Z.; NAGA, A. Validation of the a posteriori error estimator based on polynomial preserving recovery for linear elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 61, p. 1860–1893, 2004.

ZHANG, Z.; NAGA, A. A new finite element gradient recovery method: superconvergence property. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 26, p. 1192–1213, 2005.

ZHU, J. Z.; ZIENKIEWICZ, O. C Adaptive techniques in the finite element method. **Communications in Applied Numerical Methods**, v. 4, p. 197–204, 1988.

ZIENKIEWICZ, O. C. The background of error estimation and adaptivity in finite element computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 207–213, 2006.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method** – Volume 1: The Basis. Oxford: 5. ed. Butterworth Heinemann, 2000.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. A simple error estimator in the finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 337–357, 1987.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. Adaptivity and mesh generation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, p. 783–810, 1991.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: the recovery technique. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, p. 1331–1364, 1992a.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, p. 1365–1382, 1992b.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z.; WU, J. Superconvergent patch recovery technique — some further tests. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 9, p. 251–258, 1993.

ZIENKIEWICZ, O.C; ZHU, J. Z. Superconvergence and the superconvergent patch recovery. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 19, p. 11–23, 1995.

ZIENKIEWICZ, O. C; BOOROMAND, B.; ZHU, J.Z. Recovery procedures in error estimation and adaptivity Part I: Adaptivity in linear problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 76, p. 111–125, 1999.